

## Beschreibende Zeitreihenanalyse: Komponentenzerlegung mit Hilfe gleitender Mittelwerte

Thome, Helmut

Veröffentlichungsversion / Published Version

Zeitschriftenartikel / journal article

**Zur Verfügung gestellt in Kooperation mit / provided in cooperation with:**

GESIS - Leibniz-Institut für Sozialwissenschaften

### Empfohlene Zitierung / Suggested Citation:

Thome, H. (1992). Beschreibende Zeitreihenanalyse: Komponentenzerlegung mit Hilfe gleitender Mittelwerte. *Historical Social Research*, 17(3), 63-105. <https://doi.org/10.12759/hsr.17.1992.3.63-105>

### Nutzungsbedingungen:

Dieser Text wird unter einer CC BY Lizenz (Namensnennung) zur Verfügung gestellt. Nähere Auskünfte zu den CC-Lizenzen finden Sie hier:

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>

### Terms of use:

This document is made available under a CC BY Licence (Attribution). For more information see:

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0>

# **Beschreibende Zeitreihenanalyse: Komponentenzerlegung mit Hilfe gleitender Mittelwerte**

*Helmut Thome\**

Abstract: In the »classical« approach, time series data are treated as a composite consisting of - in the simplest case - a trend, a seasonal, and an irregular component. These components may be combined additively or multiplicatively. »Moving averages« is a technique for extracting these parts out of the observed series. It can be explicated in terms of a regression model. The method is demonstrated in an application to the German unemployment rate from 1970 to 1982. Several other techniques helpful in time series analysis, like Box-Cox transformations and »differencing«, are also discussed in this paper.

## **1. Einführende Bemerkungen**

Mit dieser Arbeit beginnt eine Serie von Artikeln, die in unregelmäßiger Folge in der HSR erscheinen sollen, um in die Methoden der Zeitreihenanalyse einzuführen. Auf Seiten der Leser werden elementare Kenntnisse der Inferenzstatistik und der Regressionsanalyse vorausgesetzt, wie sie im Grundkurs II der Herbstseminare des Zentrums für Historische Sozialforschung vermittelt werden (s. Thome 1990).

Historiker haben formale Methoden der Zeitreihenanalyse bisher außerhalb der Wirtschaftsgeschichte und der Demographie nur selten angewandt. Zeitreihendaten sind auch in anderen Forschungsgebieten ausgiebig gesammelt worden, beispielsweise in der historischen Kriminalitätsforschung; man hat sie aber häufig nur durch »visuelle Inspektion« der entsprechenden Plots, gelegentlich ergänzt durch einfache Trendberechnungen, analysiert. Auch die in diesem Papier vorgestellten Verfahren zur

---

\* Address all communications to Helmut Thome, Zentralarchiv für Empirische Sozialforschung - Abt. ZHSF, Universität zu Köln, Bacherstr. 40, D-5000 Köln 41.

Bestimmung des Trendverlaufs und der saisonalen Schwankungen sind für die Forschungspraxis in vielen Fällen nicht ausreichend komplex; sie stellen auch nur einen kleinen Ausschnitt aus dem großen Arsenal zeitreihen analytischer Methoden dar. Sie sind jedoch relativ leicht zu verstehen und erleichtern den (späteren) Zugang zu den komplexeren Verfahren.

Zeitreihendaten in dem hier gemeinten Sinne entstehen, wenn eine Merkmalsdimension (Variable) bei einer identischen Untersuchungseinheit in gleichbleibenden Abständen wiederholt gemessen wird. Untersuchungseinheit können einzelne Personen, Organisationen, Gruppen, Regionen oder Nationen sein. Beispiele sind die jährlichen Diebstahlsraten in Schweden von 1841 - 1985 (s. Abb. 1), die monatlichen Arbeitslosenraten der Bundesrepublik Deutschland (s. Abb. 2) oder die aus bestimmten Referenzquellen ermittelte Häufigkeitsentwicklung naturwissenschaftlicher Entdeckungen (s. Abb. 3).

Während in Querschnittanalysen die Anordnung der Fälle in der Datenmatrix beliebig ist, weil die Daten für alle Untersuchungseinheiten zum gleichen Zeitpunkt erhoben (oder als gleichzeitig erhoben betrachtet) werden, gewinnt man bei der Zeitreihenanalyse aus der temporalen Spezifikation der Messungen entscheidende Informationen für die Analyse. Eine Zeitreihe läßt sich somit als eine geordnete Folge  $Z_t$ ,  $t \in T = \{1, 2, \dots, n\}$ , von Beobachtungen einer bestimmten Variablen definieren. Dabei gehen wir von einer endlichen, diskreten Menge von gleichabständigen (äquidistanten)<sup>(1)</sup> Meßzeitpunkten aus, die mit  $t = 1, 2, \dots, n$  durchnumeriert sind. Die einzelnen »Fälle« einer Zeitreihe sind nicht wie in der Querschnittanalyse durch die verschiedenen Erhebungseinheiten, sondern durch die Meßzeitpunkte konstituiert. In diesem Artikel werden die Zeitreihendaten als gegebene Größen betrachtet, die summarisch beschrieben werden sollen. Wir bewegen uns dabei vorwiegend im Bereich »deskriptiver« Statistik, schließen nicht von Stichprobenergebnissen auf Merkmale einer Grundgesamtheit und testen auch keine theoretischen Modelle über Zufallsprozesse, aus denen die Daten hervorgegangen sein könnten.

(1) arithm. Mittel  $\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n z_t$  ... endige Kennziffern (em-  
 allem das arithmeti-  
 sich auch mit Zeitrei-  
 ler »Lage« und der

(2) Varianz  $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (z_t - \bar{z})^2$

(1) arithm. Mittel  $\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n z_t$

(2) Varianz  $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (z_t - \bar{z})^2$

Diese »Statistiken«<sup>(2)</sup> sind als summarische Beschreibung der gesamten Reihe offensichtlich nur in dem Maße aussagekräftig, wie sich deren »Systematik« innerhalb des Beobachtungszeitraums T nicht verändert. Die hiermit angesprochene »Stationarität« einer Zeitreihe wird erst in einem späteren Artikel definiert. Vorläufig erläutert bedeutet diese Eigenschaft, daß Kennziffern der Reihe nicht zu stark voneinander abweichen, wenn sie für unterschiedliche Abschnitte des Beobachtungszeitraums getrennt berechnet werden. Im Rahmen der deskriptiven Analyse läßt sich dies schon mit Hilfe einer graphischen Darstellung, dem »Plot«, einer Zeitreihe hinlänglich überprüfen. Bei den Arbeitslosendaten in Abb. 2 z. B. ist leicht erkennbar, daß das mittlere Jahresniveau der Reihe kontinuierlich sinkt. Auch die Schwankungen (die »Varianz«) um das mittlere Jahresniveau verändern sich erheblich. Arithmetisches Mittel und Varianz, über den gesamten Zeitraum berechnet, würden die Reihe in diesem Falle nicht angemessen beschreiben.

Auch die Aussagekraft einer weiteren Kenngröße, der sog. Autokovarianz, ist von der Stationarität der Reihe abhängig. Die Autokovarianz ist spezifisch für Zeitreihen definiert; für beliebig aneinander gereihte Querschnittsdaten ergibt sie keinen Sinn. Mit ihr läßt sich die Stärke eines linearen Zusammenhangs aufeinanderfolgender Beobachtungen einer einzelnen Zeitreihe charakterisieren. Formal ist sie analog zur Kovarianz zweier unterschiedlicher Variablen definiert:

$$(3) \quad c_k = \frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} (z_t - \bar{z})(z_{t+k} - \bar{z})$$

Zur Veranschaulichung dieser Formel kann man sich vorstellen, die Zeitreihe zuerst zu verdoppeln und dann die beiden »Exemplare« um eine bestimmte Anzahl k von Intervallen gegeneinander zu verschieben. Dadurch erhält man, technisch gesehen, zwei Variablen,  $Z_t$  und  $Z_{t+k}$ , mit denen sich n-k ( $k=0,1,2,\dots,n-k$ ) Datenpaare unter der Bedingung zusammenstellen lassen, daß ihre jeweiligen Meßzeitpunkte k Intervalle auseinander liegen. Bei  $k=1$  wird die Produktsumme unmittelbar aufeinanderfolgender Beobachtungen  $\{(z_1, z_2), (z_2, z_3), \dots, (z_{n-1}, z_n)\}$  gebildet, bei  $k=3$  die Produktsumme von Beobachtungen, die 3 Meßzeitpunkte voneinander entfernt sind:  $\{(z_1, z_4), (z_2, z_5), \dots, (z_{n-3}, z_n)\}$ . Die Definitionsgleichung (2) für die Varianz einer Zeitreihe ist in der Gleichung (3) enthalten: bei  $k=0$  ist  $c_0 = s^2$ .<sup>(3)</sup> Dividiert man die Autokovarianz durch die Varianz der Zeitreihe, erhält man den empirischen Autokorrelationskoeffizienten  $r_k = c_k / c_0$ .

## 2. Additive und multiplikative Komponentenmodelle

Die im vorigen Abschnitt erwähnte Stationaritätsbedingung ist häufig nicht erfüllt. Insbesondere weisen sozialwissenschaftliche Zeitreihen in vielen Fällen einen Trendverlauf und/oder saisonale Schwankungen auf. Nicht selten gilt gerade ihnen das Interesse der Wissenschaftler und der Öffentlichkeit - siehe z. B. die Diskussionen über »Lange Wellen« der wirtschaftlichen Entwicklung (Metz 1992; Spree 1991) oder über die korrekte Interpretation von Arbeitslosenzahlen, deren Anstieg oder Rückgang man als lediglich »saisonbedingt« oder als Zeichen einer verschlechterten oder verbesserten ökonomischen Gesamtlage deutet.

Unter dem Trend versteht man »eine langfristige systematische Veränderung des mittleren Niveaus der Zeitreihe« (Schlittgen u. Streitberg 1984, S. 9). Eine präzise formale Definition des Trends liegt nicht vor. Weder ist allgemein bestimmt, auf welchen Zeitraum sich die »Langfristigkeit« der Veränderung bezieht, noch ist klar festgelegt, welche Art von »Systematik« ihren Verlauf kennzeichnen soll. Hier ist der Statistiker eigentlich auf entsprechende Vorgaben der Substanzwissenschaftler angewiesen, die aber oft selbst nicht in der Lage sind, präzise Definitionen zu liefern (s. Metz 1988). Keineswegs ist mit dem »Trend« in jedem Fall eine kontinuierliche Zu- oder Abnahme der Werte gemeint, die linear zur Zeitachse verläuft. Die Begriffsbestimmung ist innerhalb der Statistik mit gutem Grund so vage gehalten, weil nur am konkreten Gegenstand und im Hinblick auf einen bestimmten Beobachtungszeitraum zu entscheiden ist, was als eine langfristige Entwicklungstendenz betrachtet werden soll. Was im Ablauf von zehn Jahren wie ein linearer Trend aussieht, mag sich, über ein Jahrhundert betrachtet, als Teil der ansteigenden oder abfallenden Linie einer langfristigen zyklischen Schwankung erweisen. Wie auch immer der Trend in einer konkreten Analyse festgelegt wird, formal ist er als eine Funktion der Zeit oder als gewichteter Durchschnitt mehrerer Beobachtungswerte innerhalb eines bestimmten Zeitraums zu definieren (s. unten). Dabei spielt die Vorstellung eine Rolle, daß die »Zeit« (bzw. der Zeitraum) als Variable kausale Größen vertritt, die nicht explizit erfaßt wurden (weil sie nicht genau bekannt sind oder weil für sie keine Daten vorliegen). So können z. B. nicht erfaßte demographische Verschiebungen den Trend sowohl in der Beitragsentwicklung bei der gesetzlichen Altersversorgung als auch in den modalen politischen Einstellungen mit bestimmen. In den Sozialwissenschaften wird häufig das Lebensalter als Substitut für nicht aufgeklärte Kausalfaktoren verwendet.

Auch hinter der Saison als jahreszeitlicher Schwankungskomponente verbergen sich nicht explizierte Kausalfaktoren wie Temperaturunterschiede, biologische Abläufe, regelmäßige Feiertage und Ferienzeiten, Budgetterminierungen. Sie sind dadurch charakterisiert, daß sie im Rhyth-

mus der Jahreszeiten variieren, wobei sich diese Variationen relativ stabil jedes Jahr wiederholen. Dadurch bedingen sie einen zyklischen Verlauf der Zeitreihe. Die Arbeitslosenzahlen liefern hierzu ein Beispiel.

Diejenigen Varianzanteile einer Zeitreihe, die man nicht aus der Trend- und Saisonentwicklung einer Zeitreihe erklären kann, faßt man unter der Bezeichnung »Restkomponente« (Residualkomponente) zusammen. In der Literatur werden sie auch häufig als »Störungen« oder als »irreguläre« Komponente bezeichnet, der man den Status einer Zufallsvariablen zuspricht. Mit dem Terminus der Störgröße wird suggeriert, daß es sich hierbei um eine Komponente handeln soll, die im Gegensatz zu Trend und Saison nicht »substanzwissenschaftlich« erklärbar ist. Folglich wünschen sich die meisten Analytiker, daß die Störgrößen über alle Meßzeitpunkte unabhängig voneinander sind (sog. »weißes Rauschen«, »white noise«), also keine Autokovarianzen aufweisen. Nur dann können nämlich die für die Trend- und Saisonkomponente errechneten Parameter als Schätzgrößen mit bestimmten statistischen Optimalitätseigenschaften aufgefaßt werden. Solange wir uns nur im Kontext der beschreibenden Analyse bewegen, brauchen wir keine speziellen Verteilungsannahmen über die Residualkomponente einzuführen. Das wird anders, wenn man Trend und Saison kausalanalytisch interpretieren, somit von der reinen Deskription zur Ebene der theoretischen Modellkonstruktion übergehen will. Wir werden zum Schluß noch einmal kurz auf diese Problematik zurückkommen.

Ökonometriker führen oft mindestens noch ein weiteres Element ein, die sog. Konjunkturkomponente, die eine mehrjährige, nicht unbedingt regelmäßige Schwankung darstellt. Gelegentlich wird die Konjunkturkomponente mit dem Trend zur »glatten« Komponente oder mit der Saison zur »zyklischen« Komponente zusammengefaßt. Wir lassen sie im folgenden außer Betracht bzw. subsumieren sie unter die Trendkomponente.

Meistens geht man davon aus, daß sich die Komponenten der Zeitreihe additiv zusammenfügen:

$$(4) \quad \text{Zeitreihe} = \text{Trend} + \text{Saison} + \text{Rest} \\ Z_t = M_t + S_t + R_t$$

In vielen Fällen (s. z. B. die Stromdaten in Abb. 14 a) ist es jedoch realistischer, davon auszugehen, daß die Saisonschwankung und die Residuen mit dem Trend wachsen, was formal durch eine multiplikative Verknüpfung der Komponenten dargestellt werden kann. (Es sei daran erinnert, daß in der Regressionsanalyse Interaktionen zwischen Variablen mit Hilfe multiplikativer Terme modelliert werden; s. Thome 1991).

$$(5) \quad Z_t = M_t * S_t * R_t$$

Solche Gleichungen lassen sich durch Logarithmieren in eine additive Form überführen:

$$(6) \quad \log Z_t = \log M_t + \log S_t + \log R_t$$

Die Abb. 4a und 4b zeigen, daß das Logarithmieren die Varianz der Stromdaten weitgehend stabilisiert hat. Wir werden später solche Fälle mit Hilfe des Spannweite-Mittel-Diagramms analysieren.

Vorstellbar ist allerdings auch, daß weder ein rein additives noch ein rein multiplikatives Modell angemessen sind. So könnten z. B. Trend und Saison miteinander »interagieren«, die Störgrößen jedoch unabhängig von diesen Komponenten bleiben:

$$(7) \quad Z_t = M_t \cdot S_t + R_t$$

Eine solche Gleichung läßt sich nicht durch Logarithmieren in eine additive Form überführen. Hier können sog. Box/Cox-Transformationen (Box u. Cox 1964; Cleveland, Devlin u. Terpenning 1982) weiterhelfen, die weiter unten erläutert werden.

Die Analyse geht nun im Prinzip so vor sich, daß aus den (evtl. transformierten) Beobachtungswerten die einzelnen Komponenten sukzessive isoliert und eliminiert werden. Im ersten Schritt wird für jeden Zeitpunkt die Trendkomponente bestimmt und vom jeweiligen Beobachtungswert abgezogen. Im zweiten Schritt wird auf der Basis der trendbereinigten Daten die Saisonkomponente bestimmt und ebenfalls subtrahiert, so daß die Restkomponente übrig bleibt. Bei logarithmierten oder auf andere Weise transformierten Daten müßten die Ergebnisse möglichst auf die untransformierten Größen »zurückgerechnet« werden (s. unten). Die Residuen können schließlich auf Unabhängigkeit und andere statistisch relevante Eigenschaften getestet werden.

Das stufenweise Vorgehen bedeutet, daß jeder nachfolgende Schritt von der Qualität des vorangegangenen abhängig ist. Dabei kann es passieren, daß die betreffende Komponente nicht vollständig oder auf eine Weise erfaßt wird, die artifizielle Strukturelemente in die verbleibende(n) Komponente(n) einschleust. Schlingen u. Streitberg (1984, S. 12) weisen darauf hin, daß »das Komponentenmodell unbestimmt (ist), solange nicht die einzelnen Komponenten präziser durch Modelle spezifiziert werden. Verschiedene Modellansätze können dabei sehr unterschiedliche Ergebnisse liefern, so daß bei der Interpretation veröffentlichter Reihenkomponenten (etwa saisonbereinigter Arbeitslosenziffern) stets nach dem jeweils benutzten Verfahren zu fragen ist.«

### 3. Globale und lokale Trendmodelle

Wir beginnen mit dem »globalen« Komponentenmodell, bei dem der Trend über den gesamten Beobachtungszeitraum als Funktion der Zeit dargestellt wird. Substanzwissenschaftliche Erwägungen können einen bestimmten Funktionstyp nahelegen. Häufiger wird der Trend schrittweise durch geeignete Funktionen approximiert. Dabei wird das additive Modell (4) zunächst vereinfacht, indem man Saison- und Restkomponente zusammenfaßt zu

$$(8) \quad u_t = S_t + R_t$$

Wählt man für die Trendfunktion eine Gerade,

$$(9) \quad M_t = a + b \cdot t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

läßt sich das additive Komponentenmodell darstellen als

$$(10) \quad Z_t = a + b \cdot t + u_t$$

Den Zeitindex  $t$  können wir nun wie eine Regressorvariable behandeln und somit die Parameter  $a$  und  $b$  nach dem üblichen Kleinstquadratkriterium,

$$(11) \quad u_t = \sum_{t=1}^n (z_t - (a + b \cdot t))^2 \doteq \min.$$

ableiten. Nach dem hier als bekannt vorausgesetzten Verfahren der Regressionsrechnung erhält man

$$(12) \quad a = \bar{z} - b \cdot \bar{t}$$

und

$$(13) \quad b = \frac{\text{kov}(z_t, t)}{s_t^2}$$

$\bar{z}$  := das arithmetische Mittel der beobachteten Zeitreihenwerte

$\bar{t}$  := das arithm. Mittel des Zeitindexes,

$\text{kov}(z_t, t)$  := die Kovarianz der Zeitreihe und des Zeitindexes,

$s_t^2$  := die Varianz des Zeitindexes.

Bekanntlich können Extremwerte die Bestimmung der Regressionsgeraden ungebührlich beeinflussen. Dies gilt natürlich auch für die regressionsanalytischen Modelle der Komponentenerlegung. Es empfiehlt sich deshalb, zu Beginn der Analyse den Plot der Zeitreihe nach einzelnen »Ausreißern« abzusuchen. Wenn man sie nicht durch eine externe, in die

Regressionsgleichung aufzunehmende Variable erklären kann, sind sie durch andere Werte zu ersetzen. Traditionellerweise wählt man dazu das arithmetische Mittel aller oder nur der unmittelbar benachbarten Werte (lineares »Interpolieren«); oder man schiebt den Ausreißer näher an die anderen Werte heran, so daß er z. B. nur noch zwei Standardabweichungen vom Mittelwert entfernt ist.<sup>(4)</sup>

Gelegentlich läßt der Plot einer Zeitreihe erkennen, daß die Annahme eines linearen Trends nicht angemessen ist. Abb. 5 stellt einen Fall dar, in dem eine kubische Trendfunktion

$$(14) \quad M_t = a + bt + b_2t^2 + b_3t^3$$

die langfristige Entwicklungstendenz der Reihe besser approximiert. Da die Gleichung (14) hinsichtlich der Parameter linear ist, ändert sich an der Regressionsrechnung nichts, wenn man die potenzierten Werte des Zeitindex als Regressoren einsetzt.

Die Trendgleichungen (9) und (14) sind Spezialfälle der allgemeinen Klasse polynomialer Funktionen:

$$(15) \quad M_t = a + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_pt^p$$

Der Exponent »p« bezeichnet den Grad (auch »Ordnungsgrad«)<sup>(5)</sup> des Polynoms. Wenn er nicht aus Substanzwissenschaftlichen Erwägungen eindeutig festgelegt werden kann, bietet sich folgende Vorgehensweise an: Man paßt sukzessive Polynome mit ansteigendem Ordnungsgrad p, beginnend mit p=1, an und ermittelt jeweils die quadrierten Differenzen

$$(16) \quad Q_p = \sum_{i=1}^n (Z_i - M_i)^2$$

Da  $Q_p$  den quadrierten Abstand der Beobachtungswerte zu den geschätzten Trendwerten ausdrückt, eignet es sich als Maß für die Güte der Anpassung. Es ist anzunehmen, daß  $Q$  mit wachsendem  $p$  zunächst stärker und dann wesentlich langsamer abnimmt. Falls die Modell-Voraussetzungen der Regressionsanalyse erfüllt sind, kann man F-Tests durchführen, mit denen sich klären läßt, ob ein zusätzlicher Polynomgrad noch eine signifikante Veränderung in  $Q$  herbeiführt. (Für eine genaue Beschreibung des Verfahrens s. Anderson 1971, S. 34ff.) In der Praxis führt diese Methode aber häufig nicht zu einem eindeutigen Ergebnis, da  $Q$  in vielen Fällen ziemlich unregelmäßig abnimmt. Als weiteres Hilfsmittel bietet sich die Methode der »variablen Differenzen« an (s. Kendal 1973, S.47ff.; Leiner 1982, S. 50f.; Schlingen u. Streitberg 1984, S. 17,29), deren Grundgedanken ich weiter unten noch kurz skizzieren werde.

Mit polynomialen Funktionen lassen sich empirische Zeitreihen oft gut beschreiben. Für Trendextrapolationen (Prognosen) sind sie jedoch weniger

geeignet, da ihre Werte außerhalb des Anpassungsbereiches ( $t=1, 2, \dots, n$ ) rasch nach  $\pm \infty$  streben.

Soll eine Trendfunktion als theoretisches Modell interpretiert werden, ist zu prüfen, ob die Residualgröße  $u_t$  in Gleichung (10) die statistisch gewünschten Merkmale aufweist, die dafür sorgen, daß die geschätzten Regressionskoeffizienten optimale Eigenschaften (Erwartungstreue, Effizienz, Konsistenz) besitzen. Die Residuen müßten dann unabhängig voneinander sein, konstante Varianz aufweisen und dürften mit dem Zeitindex nicht korrelieren. Technisch läßt sich die Residuenanalyse in ähnlicher Weise durchführen wie in der »normalen« Regressionsanalyse mit Quer Schnittdaten. Allerdings ist erst mit Zeitreihen daten die Annahme der Unabhängigkeit der Fehler empirisch prüfbar. Dazu sind verschiedene Vorschläge gemacht worden (s. Kendall 1973, Kap. 2), die ich hier nicht referieren möchte, teilweise aber in nachfolgenden Artikeln darstellen werde.

Die bisher besprochenen Trendmodelle sind alle »linear in den Parametern«, selbst dann, wenn der Zeitindex mit einem Exponenten  $p>1$  auftritt. Auch Modelle, die nicht in diesem Sinne linear sind, lassen sich teilweise durch Logarithmieren oder andere Transformationen der Daten in lineare Modelle überführen. Dazu gehören z. B. Exponentialmodelle wie

$$(17) \quad Z_t = e^a \cdot e^{bt} \cdot e^{u_t},$$

wobei  $e$  die Eulersche Zahl 2,71828... darstellt und  $u_t$  die Fehlergröße repräsentiert.

Durch Logarithmieren erhält man daraus das lineare Regressionsmodell

$$(1-17a) \quad \ln Z_t = a + b t + u_t,$$

dessen Parameter sich mit Hilfe des üblichen Kleinstquadratverfahrens schätzen lassen.

Realistischer als exponentiale Wachstumsmodelle dieser Art sind häufig Modelle, die eine Grenze des Wachstums annehmen, der sie zwar kontinuierlich zustreben, die sie aber nicht erreichen (s. Abb. 6). Ein solches Modell läßt sich mit Hilfe logistischer Funktionen formalisieren (s. Härtung 1986, S. 643):

$$(18) \quad M_t = \frac{\gamma}{1 + \beta e^{-\alpha t}}$$

Es ist inhärent nichtlinear. Bei  $\alpha > 0$  liegt die Sättigungsgrenze für  $t \rightarrow \infty$  bei  $\gamma$ ; bei  $\alpha < 0$  und  $t \rightarrow \infty$  strebt die Kurve gegen Null, bei  $t \rightarrow 0$  (unabhängig vom Vorzeichen von  $\alpha$ ) gegen  $\gamma/(1+\beta)$ . Die Parameter  $\gamma$ ,  $\beta$  und  $\alpha$  können mit den Schätzalgorithmen der nicht-linearen Regressionsanalyse, wie sie in Standardprogramm Paketen wie SPSS<sup>x</sup> oder SAS implementiert

sind, bestimmt werden. Bei einer eventuellen *statistischen* Interpretation solcher Modelle ist allerdings zu beachten, daß die Fehlergrößen ( $Z_t - M_t$ ) bei solchen Daten normalerweise nicht unabhängig voneinander sind. Bei einer rein deskriptiven Kurvenanpassung kann dieses Problem vernachlässigt werden.

Alle globalen Modelle der Trendbestimmung haben den Nachteil, daß sich mit jeder neuen Beobachtung, die außerhalb des bisherigen Untersuchungszeitraums liegt, die ermittelten Parameter mehr oder weniger stark ändern, wenn man sie unter Einschluß der hinzugewonnenen Werte neu berechnet. Eine größere Modellflexibilität wird erreicht, wenn man den Trend jeweils nur »lokal« für einen bestimmten Abschnitt der Zeitreihe, den sog. Stützbereich, bestimmt, der lediglich eine relativ eng begrenzte Menge aufeinanderfolgender Meßzeitpunkte umfaßt. Das dazu meist angewandte Verfahren ist das der **gleitenden Mittelwerte** (»moving averages«), bei denen man wie folgt vorgeht:

Zunächst wird die Menge von Meßzeitpunkten ausgewählt, die den Stützbereich bilden sollen. Wir gehen bis auf weiteres davon aus, daß er eine ungerade Zahl ( $2q + 1$ ) aufeinanderfolgender Zeitpunkte umfaßt. (Gesichtspunkte für die Wahl des Stützbereichs werden im Laufe der Darstellung noch deutlich.) Die Grundidee des Gleitmittelverfahrens besteht darin, den Trendwert für einen bestimmten Zeitpunkt  $t$  als gewichtetes Mittel der Beobachtungswerte ( $z_{t-q}, \dots, z_{t-1}, z_t, z_{t+1}, \dots, z_{t+q}$ ) des Stützbereichs zu definieren. Die einfachste Form der Durchschnittsbildung ist das arithmetische Mittel, bei dem jeder Beobachtungswert das gleiche Gewicht,  $1/(2q+1)$ , erhält. Wenn wir beispielsweise  $q=2$  festlegen und die Mittelung über die ersten fünf Meßzeitpunkte  $t=1, 2, 3, 4, 5$  durchführen, erhalten wir als Trendwert für  $t=3$

$$(19) \quad M_3 = \frac{1}{5}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5) = \frac{1}{2 \cdot 2 + 1} \sum_{t=1}^5 z_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{t=1}^{2q+1} z_t$$

Den nächsten Trendwert ermitteln wir für  $t=4$ , indem wir den Stützbereich um eine Zeiteinheit nach vorne verschieben und den Mittelungsprozeß für die neue Menge von Beobachtungseinheiten durchführen:

$$(20) \quad M_4 = \frac{1}{5}(z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6)$$

Diesen Vorgang des schrittweisen Verschiebens des Stützbereichs und der Bestimmung des Trendwertes für den jeweils mittleren Zeitpunkt wiederholen wir bis zum Ende der Zeitreihe (s. Abb. 7). Auf diese Weise erhält man eine Folge von Trendwerten  $\{M_t\}$ , die weniger stark fluktuieren als die beobachteten Werte der Zeitreihe  $\{Z_t\}$ . Die Fluktuation wird um so gerin-

ger, je länger der Stützbereich ist. Man sagt auch, mit dem gleitenden Durchschnitt werde die Zeitreihe »geglättet«. Wenn man keine besonderen »Tricks« anwendet (»Randausgleich«, s. Leiner 1982, S. 43ff.), gehen am Anfang und am Ende der Reihe jeweils  $q$  Meßwerte »verloren«.

Wenn der Stützbereich eine gerade Zahl von Zeitpunkten, z.B vier, umfaßt, liegt der mittlere Zeitpunkt rechnerisch bei  $t=2,5$ . Um diese unerwünschte Situation zu vermeiden, kann man den Trendwert über zwei aufeinanderfolgende Stützbereiche mitten, in unserem Falle also

$$(21) \quad M_{2,5} = \frac{1}{4}(z_1+z_2+z_3+z_4)$$

$$M_{3,5} = \frac{1}{4}(z_2+z_3+z_4+z_5)$$

Der gewichtete Wert  $M$ , ergibt sich aus

$$(22) \quad M_3 = \frac{1}{2}(M_{2,5}+M_{3,5}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}z_1 + \frac{1}{4}z_2 + \frac{1}{4}z_3 + \frac{1}{4}z_4 + \frac{1}{4}z_2 + \frac{1}{4}z_3 + \frac{1}{4}z_4 + \frac{1}{4}z_5\right)$$

$$= \frac{1}{8}z_1 + \frac{1}{4}z_2 + \frac{1}{4}z_3 + \frac{1}{4}z_4 + \frac{1}{8}z_5$$

Man kann also den Gleitmittelwert für einen geradzahligen Stützbereich ( $2q$ ) errechnen, indem man den Stützbereich über  $2q+1$  Zeitpunkte festlegt und die Gewichte für den Anfangs- und Endzeitpunkt halbiert.

Dieses Verfahren der gleitenden Durchschnitte scheint nichts gemein zu haben mit der Anpassung einer polynomialen Funktion, die wir zuvor beschrieben haben. Man könnte es deshalb für schlecht begründet, allenfalls für intuitiv plausibel halten. Es läßt sich aber zeigen, daß dieses Verfahren nichts anderes ist als eine Kurzform der Regressionsrechnung mit den Daten des Stützbereichs.

Dazu stellen wir uns die Aufgabe, die Trendfunktion, die wir im vorigen Abschnitt als »globales« Trendmodell eingesetzt haben, nun »lokal« an die Daten des Stützbereichs anzupassen. Um uns die Arbeit zu erleichtern, ändern wir das Zählsystem für den Zeitindex. Den mittleren Zeitpunkt des jeweiligen Intervalls bezeichnen wir von nun an mit  $t=0$ , die Zeitpunkte des Stützbereichs folglich mit  $t=-q, -q+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, q-1, q$  und die Beobachtungswerte mit  $z_{-q}, \dots, z_0, \dots, z_q$ , so daß

$$(23) \quad M_t = a + b \cdot t \quad , \quad t = -q, \dots, 0, \dots, q \quad ; \quad (9) \text{ wiederholt}$$

gilt. Diese Transformation der Zeitachse ist legitim; sie entspricht der Zentrierung der Regressorvariablen durch Subtraktion des Mittelwertes von

den Beobachtungswerten. Aus  $t = 1,2,3,4,5$  wird  $t = -2,-1,0,1,2$ . Folglich ist nun  $F=0$ .

Wie läßt sich nun gemäß (23) der Trendwert  $M_0$  für den mittleren Meßzeitpunkt  $t=0$  berechnen? Nach der Zentrierung der Zeitvariable ist  $M_0$  offensichtlich identisch mit dem Ordinatenabschnitt

$$(24) \quad M_0 = a + b \cdot 0$$

Für den Ordinatenabschnitt einer Regressionsgleichung  $y = a + b x + u$  gilt aber allgemein

$$(25) \quad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

Dem entspricht in unserer Notation für die Zeitreihenanalyse

$$(25a) \quad a = \bar{z} - b\bar{t} \quad (1-12) \text{ wiederholt}$$

oder nach Zentrierung der Zeitvariablen zu  $t^* = t - \bar{t}$

$$(25b) \quad a = \bar{z} - b t^* = \bar{z}, \text{ da } t^* = 0$$

Folglich gilt für den Trendwert in (24):

$$(24a) \quad M_0 = a = \bar{z} = \frac{1}{2|q|+1} \sum_{t^*=-q}^q z_t^*$$

Dieser Ausdruck entspricht der Rechen **Vorschrift** in (19). Der »**einfache**« gleitende Durchschnitt führt zum gleichen Trendwert wie die Anpassung einer polynomialen **Funktion** erster Ordnung an die Daten des Stützbereichs, wenn man mit der Regressionsgleichung lediglich den Schätzwert der »abhängigen« Variablen  $Z_t$  für den **mittleren** Zeitpunkt im Stützbereich berechnet. Dies gilt auch nach einer beliebigen Verschiebung des Stützbereichs auf der Zeitachse; denn die  $t$ -Werte eines aktuellen Stützbereichs können stets zu  $t^* = t - \bar{t}$  mit  $\bar{t}^* = 0$  zentriert werden. Das Verfahren der gleitenden Durchschnitte läßt sich **somit** als Anwendung des Regressionsmodells interpretieren (nähere Erläuterungen im Anhang).

Wie bei der globalen, so mag man auch bei der lokalen Trendbestimmung eine polynomiale Funktion höherer Ordnung (bzw. höheren »Grades«) mit  $p > 1$  vorziehen. Auch in diesem Falle kann man sich die ausführliche Regressionsrechnung sparen und statt **dessen** wiederum gleitende Durchschnitte ermitteln, allerdings mit veränderten Gewichtungskoeffizienten für die einzelnen Beobachtungswerte. Bei  $p=1$  benutzen wir für alle Beobachtungswerte den Gewichtungskoeffizienten  $1/(2q+1)$ . Für  $p=2=q$  erhält man dagegen die Gewichte

$$(1/35)(3,12,17,12,3)$$

in dieser Reihenfolge für  $z_{-q}, \dots, z_0, \dots, z_q$ . Wenn wir die Gewichte mit  $a_u$ ,  $u = -q, \dots, q$  abkürzen, so gilt

$$\sum a_u = 1$$

Die Summe der Gewichte ergibt stets 1. Für einen geradzahligen Ordnungsgrad  $p$  gelten die gleichen Gewichtungskoeffizienten wie für den folgenden Ordnungsgrad  $p+1$  (s. Kendall 1973, S. 30-32). Sie sind (in diesem Ansatz) auch stets symmetrisch.<sup>6)</sup> Einige Lehrbücher (so z. B. Kendall 1973, S. 33ff.) enthalten Tabellen, in denen die Gewichte für verschiedene Ordnungsgrade und wechselnde Stützbereichslängen angegeben sind. Der formale Zusammenhang zwischen polynomialen Trendfunktionen und Gewichtungskoeffizienten für gleitende Durchschnitte beliebiger Ordnung wird im Anhang dargestellt.

Mit der eben skizzierten Methode wollen wir den Trend der Arbeitslosendaten der BRD von Jan. 1970 bis Dez. 1982 (s. Abb. 8) bestimmen und aus der Zeitreihe eliminieren. Zuvor ist noch ein weiteres Hilfsmittel zu erläutern, das wir bei dieser Analyse benötigen, nämlich

#### **4. Spannweite-Mittel-Diagramm und Box/Cox-Transformationen**

Der Plot der Arbeitslosendaten in Abb. 8 <sup>^</sup> zeigt, daß im letzten Abschnitt der Untersuchungsperiode die Monatswerte ansteigen. Gleichzeitig dehnen sich die saisonalen Schwankungen aus. Dies legt eher ein multiplikatives als ein additives Komponentenmodell nahe, aber auch ein Mischmodell ist nicht auszuschließen. Ein Hilfsmittel, die Angemessenheit eines bestimmten Modelltyps herauszufinden, ist das »Spannweite-Mittel-Diagramm« (SMD): Die vorliegende Zeitreihe wird in  $k$  gleich lange Abschnitte unterteilt (bei monatlichen Daten z. B. in Jahresabschnitte). Für jeden Abschnitt werden die Spannweiten (»ränge«) und die arithmetischen Mittel der beobachteten Werte berechnet. In einem Streudiagramm werden sodann die Spannweiten (als Ordinatenwerte) gegen die auf der Abszisse eingetragenen Mittelwerte  $\bar{z}_i$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) geplottet. In unserem Beispiel führen wir die Rechnung für dreizehn 12-Monats-Abschnitte (Jan. 1970 bis Dez. 1982) durch (s. Abb. 9).

Statt der Spannweiten können auch die Standardabweichungen (s. Schlittgen u. Streitberg 1984, S. 82) eingesetzt werden. Das Programmpaket SPSS<sup>x</sup> bietet unter dem Kommando EXAMINE die Möglichkeit, einen »spread-versus-level-plot« zu erhalten, in dem auf der Ordinate der natürliche Logarithmus des Interquartilsabstands und auf der Abszisse der natürliche Logarithmus des Medians abgetragen werden. Wie auch immer, ein rein additives Modell ist nur dann angemessen, wenn die Punkte des

Streudiagramms am besten durch eine Gerade zu repräsentieren sind, die parallel zur Abszisse verläuft. Steigen dagegen die Ordinatenwerte gemäß einer Geraden von links unten nach rechts oben an, bedeutet dies, daß die Spannweite (und damit die saisonalen Schwankungen und/oder die »Fehler«) mit dem mittleren Niveau der Zeitreihe proportional zunehmen. In diesem Falle wäre eine multiplikative Verknüpfung zu wählen, die durch Logarithmieren der Werte in eine lineare überführt werden könnte. In unserem Beispiel (s. Abb. 9) ist nicht recht deutlich, ob die erkennbare Steigungstendenz überhaupt geradlinig verläuft oder ob die Punkte mit zunehmendem  $z_t$  nach unten von der Geraden abweichen. Letzteres würde ein Mischmodell anzeigen. Wir probieren zunächst ein rein multiplikatives Modell aus, führen also eine Log-Transformation

$$Z_t^* = \ln Z_t$$

durch (s. Abb. 10) und konstruieren ein neues SMD für die logarithmierten Daten (s. Abb. 11).

In Abb. 10 ist sofort erkennbar, daß nun die Spannweiten mit dem steigenden Niveau der Reihe abnehmen. Demgemäß ergibt sich im SMD (s. Abb. 11) eine negative Beziehung: Die Punkte streuen um eine Gerade, die von links oben nach rechts unten abfällt. Die Log-Transformation hat also nicht das gewünschte Ergebnis (Stabilität der Streuung) gebracht, denn dann müßten die Punkte um eine Parallele zur X-Achse variieren. Es scheint also ein Mischmodell vorzuliegen. In diesem Fall kann man auf eine Klasse von Transformationen zurückgreifen, die Box u. Cox (1964) vorgeschlagen haben:

$$(26) \quad Z_t^* = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}(Z_t^\lambda - 1) & , \text{für } \lambda \neq 0 \\ \ln Z_t & , \text{für } \lambda = 0 \end{cases}$$

Der natürliche Logarithmus von  $Z_t$  ist ein Grenzfall der Box/Cox-Transformation, der sich aus dem Grenzwert  $\lim (Z_t^\lambda - 1)/\lambda = \ln Z_t$  für  $\lambda \rightarrow 0$  ergibt. Im allgemeinen leistet eine rechnerisch einfachere Potenztransformation die gleichen Dienste (s. Box u. Cox 1964, S. 214):

$$(27) \quad Z_t^* = \begin{cases} Z_t^\lambda & , \text{für } \lambda \neq 0 \\ \ln Z_t & , \text{für } \lambda = 0 \end{cases}$$

Box u. Cox (1964) geben eine formale Methode zur Schätzung von  $X$  an (s.

auch Mohr 1980; Spitzer 1982). Das Programmpaket SPSS<sup>x</sup> (wie einige andere auch) bietet ebenfalls (unter dem schon erwähnten Kommando EXAMINE) eine statistische Testmöglichkeit, mit der dasjenige Lambda ermittelt werden kann, das die Varianz gruppierter Daten am ehesten homogenisiert. Wieso die näherungsweise Bestimmung von  $\lambda$  mit Hilfe des SMD im allgemeinen funktioniert, zeigen Schlingen u. Streitberg (1984, S. 82).

Die rein multiplikativen Modelle ( $\lambda=0$ ) und die rein additiven Modelle ( $\lambda=1$ ) haben wir bereits besprochen. Abb. 12 zeigt darüber hinaus in schematischer Weise die Gestalt der Streudiagramme für diverse Mischmodelle, von denen das in der Wurzeltransformation (Fall 3 in Abb. 12) implizierte Modell in der Praxis am gebräuchlichsten ist.

Wenn nach einer ersten Transformation die Punkte im SMD um eine negative Gerade bzw. Kurve streuen (wie in unserem Beispiel nach der Logarithmierung), muß Lambda erhöht (hier also größer Null) werden. Wenn die Punkte des Streudiagramms nach einer ersten Transformation um eine positive Gerade streuen, muß  $\lambda$  verringert werden. Der Versuch mit  $\lambda=0.5$  (Wurzeltransformation) bringt für die Arbeitslosendaten in unserem Beispiel ein befriedigendes Ergebnis, wie Abb. 1.13 und 1.14 zeigen. Der Plot der wurzeltransformierten Reihe (Abb. 1.13) zeigt deutlich, wie durch die Box-Cox-Transformation die Varianz stabilisiert werden konnte. Demgemäß wäre die Punktwolke des SMD am ehesten durch ein Parallele zur Abszisse zu repräsentieren.<sup>(8)</sup>

Welches Mischmodell in der Wurzeltransformation impliziert ist, erkennen wir, wenn wir die  $Z_t^*$ -Werte wieder in die originalen  $Z_t$ -Werte zurückrechnen (s. unten). Zunächst jedoch wollen wir die Trend- und die Saisonkomponente für die wurzeltransformierte Reihe bestimmen. Für sie wird das additive Modell

$$(28) \quad Z_t^* = M_t^* + S_t^* + R_t^*$$

angenommen.

## 5. Berechnung der Trend- und Saisonkomponente von Arbeitslosendaten<sup>(9)</sup>

Die Trendkomponente berechnen wir in diesem Beispiel mittels eines einfachen gleitenden Durchschnitts über 12 Monate. Die Wahl dieses Stützbereichs ergibt sich aus dem Bestreben, die Trendkomponente von Saisoneinflüssen freizuhalten.<sup>(10)</sup> Da es sich um einen geradzahligen Stützbereich handelt, wird der gleitende Durchschnitt (also die Trendwerte  $M_t$ ,  $t=7,8,\dots,n$ ) jeweils über 13 Zeitpunkte berechnet, wobei der erste und der dreizehnte Monatswert nicht mit  $1/12$ , sondern - wie oben erläutert - jeweils mit  $1/24$  zu gewichten ist:

$$(29) \quad M_t = \sum_{j=-6}^6 b_j z_{t+j}, \quad b = \begin{cases} \frac{1}{1} & \text{für } j = -5, -4, \dots, 4, 5 \\ \frac{1}{24} & \text{für } j = -6, +6 \\ -\frac{1}{24} & \text{für } j = -5, -4, \dots, 4, 5 \\ \frac{1}{24} & \text{für } j = -6, +6 \end{cases}$$

Die Sternchensymbole zur Kennzeichnung der transformierten Daten lassen wir weg. Die Verfahrenstechnik der Trend- und Saisonbestimmung ist unabhängig davon, ob das additive Modell für die Originaldaten oder für die transformierten Reihen berechnet wird. Abb. 15 zeigt die Trendwerte, Abb. 16 die trendbereinigte Reihe der wurzeltransformierten Arbeitslosendaten.

Als nächstes ist die Saisonkomponente zu bestimmen, die nur mit trendfreien Daten zu berechnen ist. Die trendfreie Zeitreihe wollen wir als  $Y$ -Reihe bezeichnen:

$$(30) \quad Y_t = Z_t - M_t$$

Zur Bestimmung der Saisonfigur sind eine Vielzahl von Verfahren vorgeschlagen worden (siehe Stier 1980). Bei konstanter (starrer, fixer) Saisonfigur können z. B. trigonometrische Funktionen angepaßt oder eine Dummy-Regression (s. Kerlinger u. Pedhazur 1973) durchgeführt werden.

Einen sehr einfachen Weg, die Saisonkomponente zu bestimmen, bietet das sog. **Phasendurchschnittsverfahren**. Dabei wird ebenfalls vorausgesetzt, daß die Saisonfigur über Zeit nicht variiert, so daß sich die Werte  $S_i$  der saisonalen Komponente als periodische Folge  $S_i = S_{i+p}$  schreiben lassen. Wenn Monatsdaten vorliegen, ist  $p=12$ , bei Quartalsdaten ist  $p=4$ . Das bedeutet, daß die Saisonkomponente für einen Monat  $i$ , ( $i = 1, 2, \dots, 12$ ) in jedem Jahr den gleichen Betrag aufweist. Abweichungen werden der Restkomponente zugeschlagen.

Es liegt nahe, die Saisonfigur zu berechnen, indem man die trendbereinigten Beobachtungswerte jeweils getrennt für die einzelnen Monate über den gesamten Untersuchungszeitraum mittelt. Als Ergebnis erhält man die sog. Phasendurchschnitte  $S_i$ :

$$(31) \quad S_i = \frac{1}{11} \sum_{t=1}^{11} Y_{t+i-1} \quad i = 1, 2, \dots, 12$$

Der umständliche Index ergibt sich daraus, daß wir beim Summieren jeweils 11 Monate überspringen müssen und außerdem berücksichtigen wollen, daß wir durch die vorangegangene Trendbereinigung mit einem Zwölfer-Durchschnitt sechs Fälle am Anfang und am Ende der Reihe verloren

haben. In unserem Beispiel beginnt die Ausgangsreihe Z, der Arbeitslosen mit dem Januar 1970. Dieser Beobachtungswert hat den Zeitindex  $t=1$ . Die trendbereinigte Reihe Y, beginnt mit dem Wert  $Y_i=7$  für Juli 1970, dem somit der Index  $i=1$  zugeordnet wird. Der Index k zählt die Jahre, über die die Beobachtungswerte zu mittein sind. Da er bei  $k=0$  beginnt, ist  $m_i+1$  gleich der Anzahl der Jahre, in denen Beobachtungswerte für einen bestimmten Monat i vorliegen. Der Phasendurchschnitt für den Monat Juli, ermittelt über alle Jahre von 1970 bis 1982, ergibt sich also aus folgender Rechnung:

$$(32) \quad S_1 = \frac{1}{11+1} (Y_{1+6} + Y_{1+6+12} + Y_{1+6+2 \cdot 12} + \dots + Y_{1+6+11 \cdot 12})$$

|  
Juli 70

|  
Juli 71

|  
Juli 81

Für Juli 1982 liegt nach der Trendbereinigung (ohne Randausgleich) kein Wert mehr vor. Für die Januar-Werte lautet die Rechnung

$$(33) \quad S_7 = \frac{1}{11+1} (Y_{7+6} + Y_{7+6+12} + Y_{7+6+2 \cdot 12} + \dots + Y_{7+6+11 \cdot 12})$$

|  
Jan. 71

|  
Jan. 72

|  
Jan. 82

Wenn die Menge der Beobachtungswerte (nach der Trendbereinigung) kein ganzzahliges Vielfaches von  $2q$  (hier  $q=6$ ) ist, ist  $m_i$  (hier  $m_i=11$ ) nicht für alle  $i$  gleich. Der Wert für  $m_i$  muß dann spezifisch für jeden Monat bestimmt werden. Dabei ist zu berücksichtigen, daß am Anfang und am Ende der Reihe durch eine vorangegangene Trendbereinigung je 6 Werte wegfallen. Allerdings lassen sich diese Werte, wie bereits erwähnt, durch einen sog. Randausgleich zurückgewinnen. Das Verfahren ist anschaulich beschrieben in Bohley (1985, S. 248ff.).

Wenn die Daten keinen Trend mehr aufweisen (s. Abb. 16), müßten die Phasendurchschnitte  $S_i$  aller Monate zusammengenommen im Mittel den Betrag Null ergeben:

$$(34) \quad \mu_s = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} s_i = 0 \quad ,$$

falls die Saisonfigur wirklich konstant ist oder irreguläre Abweichungen sich über Zeit aufheben (Bohley 1985, S. 236). Diese Voraussetzung ist jedoch nur selten erfüllt, d.h., in der Regel gilt  $\mu_s \neq 0$ . In diesem Falle »standardisiert« man die Saisonfigur mit

$$(35) \quad S_i^{(s)} = S_i - \mu_s, \quad i = 1, 2, \dots, 12$$

Der Betrag  $|i|$  wird der Trendkomponente zugeschlagen:

$$(36) \quad M_t^{(s)} = M_t + \mu_s$$

Demgemäß bezeichnet man  $M_t^{(s)}$  als standardisierte Trendkomponente.

Die standardisierten Saisonbeträge für die einzelnen Monate müssen nun in korrekter Ordnung über den gesamten Zeitraum hintereinander geschrieben werden, so daß  $S_t = S_{t-12}$  gilt. Diesen Vorgang bezeichnet man mit folgender Symbolik:<sup>(12)</sup>

$$(37) \quad \tilde{S}_t = S_{t-6 \bmod(12)}^{(s)}, \quad t = 7, \dots, n$$

Abb. 17 zeigt die standardisierte Saisonkomponente für unser Analysebeispiel mit den Arbeitslosendaten. Aus ihr ist auch der aus einem Kodierungsfehler entstandene irreguläre Zacken Mitte 1979 (s. Fußnote 7) »ausgebügelt«.

In einem weiteren Schritt können standardisierte Saison und Trendwerte gemeinsam von den wurzeltransformierten Beobachtungswerten subtrahiert werden (s. Abb. 18), so daß die Restkomponente sichtbar wird:  $R_t = Z_t - M_t^{(s)} - S_t^{(s)}$ . Wie sieht nun dieses Modell aus, wenn wir es auf die (nichttransformierten) Originaldaten beziehen? Die  $Z_t^*$ -Reihe mit den nach Gleichung (27) transformierten Daten kann mit Hilfe der inversen Box/Cox-Funktion in die Originalreihe  $Z_t$  zurückgerechnet werden:

$$(38) \quad Z_t = \begin{cases} (Z_t^*)^{1/\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ e^{Z_t^*}, & \lambda = 0 \end{cases}$$

In unserem Beispiel mit  $\lambda=1/2$  ist die quadratische Funktion anzuwenden:

$$(39) \quad \begin{aligned} Z_t &= (Z_t^*)^2 = (M_t^* + S_t^* + R_t^*)^2 \\ &= (M_t^*)^2 + (S_t^*)^2 + (R_t^*)^2 + 2M_t^*S_t^* + 2M_t^*R_t^* + 2S_t^*R_t^* \end{aligned}$$

Die ausmultiplizierte Gleichung zeigt die Mischform, die für die Originaldaten gilt; es liegt weder ein rein additives noch ein rein multiplikatives Komponentenmodell vor. Wenn man dennoch Trend-, Saison- und Restkomponenten voneinander isolieren möchte, ist dies nur möglich, indem man sie hierarchisieren möchte, die multiplikativen Ausdrücke also jeweils einer der beteiligten Komponenten zuschlägt:

$$\begin{aligned}
 \hat{M}_t &= (M_t^*)^{\frac{1}{2}} = (M_t^*)^2 \\
 \hat{S}_t &= (M_t^* + S_t^*)^2 - \hat{M}_t \\
 (40) \quad &= S_t^* + 2M_t^* S_t^* \\
 \hat{R}_t &= Z_t - \hat{M}_t - \hat{S}_t \\
 &= R_t^* + 2S_t^* R_t^* + 2M_t^* R_t^*
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich wiederum die additive Verknüpfung

$$(41) \quad Z_t = \hat{M}_t + \hat{S}_t + \hat{R}_t,$$

wobei die »Hütchen« über den Buchstaben darauf hinweisen sollen, daß die Komponenten nun eine etwas andere Bedeutung haben als in Gleichung (4); sie sind »künstlich« aus einem Mischmodell isoliert worden. Ebenso hätte man statt der Trend- die Saisonkomponente als erste isolieren können. In der Praxis werden die Komponenten der Mischmodelle gelegentlich noch auf andere Weise berechnet: Man schätzt für die gleiche Zeitreihe sowohl rein multiplikative als auch rein additive Modelle und mittelt die Ergebnisse.

Das soeben dargestellte Verfahren der Komponentenzerlegung ist zwar einfach, weist aber auch einige Nachteile auf, deren man sich bewußt sein sollte (s. auch Stier 1991):

- (1) Wie **bereits** betont, wird eine konstante<sup>(13)</sup> Saisonfigur angenommen: die Folge der einzelnen Monatswerte (innerhalb der Saisonkomponente) soll über alle Jahresperioden gleich bleiben. Das führt dazu, daß tatsächlich vorhandene Schwankungen in der Saisonfigur ausgemittelt werden.
- (2) In unserem Beispiel haben wir den Trend über einen Stützbereich von 12 Monaten ermittelt, um die Saisonkomponente auszuschalten. Unter Umständen ist aber für die Trendbestimmung aus theoretischen Gründen ein Stützbereich geboten, der mit der Saisoneliminierung nicht vereinbar ist. In diesem Falle müssen für die Saisonbereinigung andere Verfahren gewählt werden (s. z. B. das unten erwähnte »Berliner Verfahren«).
- (3) Wegen der Annahme der fixen Saisonfigur können **artifizielle** systematische Bewegungen in die Restkomponente eingeführt werden,

sofern sich die Saisonfigur der beobachteten Reihe entgegen der Annahme über Zeit verändert. Dies ist vor allem dann zu bedenken, wenn man gerade die Abweichungen von Trend und Saison theoretisch erklären möchte. Insbesondere werden in Zeitreihen, deren Daten stochastisch unabhängig sind, durch gleitende Mittelwerte serielle Abhängigkeiten (Autokorrelationen) erzeugt, die zu periodischen Schwingungen führen können, sog. Slutzky-Effekt (s. Bohley 1985, S. 253).

- (4) Es ist unmittelbar einsehbar, daß gleitende Durchschnitte »Gipfel« abschleifen und »Täler« in den Kurvenverläufen teilweise zuschütten. Diesen Effekt kann man jedoch durch die Wahl entsprechend komplizierter Gewichtungverfahren mindern. Zu beachten ist auch, daß Umkehrpunkte durch das Glätten zeitlich verschoben werden. Ähnliche Probleme entstehen, wenn die Originalreihe Sprünge aufweist. Auch sie werden in der geglätteten Reihe weder korrekt wiedergegeben noch bleiben sie unberücksichtigt, wie Abb. 19 zeigt.

Wir haben hier nur die Grundzüge des Verfahrens der gleitenden Durchschnitte bzw. der Approximation der Zeitreihe durch verschiedene Regressionsmodelle besprochen. Diese Verfahren der Komponentenzerlegung lassen sich durch komplexere »Filter« (Gewichtungsschema)<sup>(14)</sup> und zusätzliche Elemente anreichern. Am bekanntesten sind wohl das »Berliner Verfahren« (in mehreren Versionen entwickelt an der Technischen Universität Berlin in Zusammenarbeit mit dem Deutschen Institut für Wirtschaftsforschung) und das amerikanische Census-XII -Verfahren. Kurzbeschreibungen und Literaturhinweise hierzu liefert z. B. Leiner (1982, S. 56ff). Eine Version des Census-Verfahrens ist in dem Programmpaket SPSS7 TREND implementiert.

Wie komplex auch immer diese Verfahren gestaltet werden, ihr mathematisch-statistischer Ansatz ist zumindest umstritten (Schlingen u. Streitberg 1984, S. 68). Das Glätten der Zeitreihen und ihre Zerlegung in Komponenten bleiben im wesentlichen deskriptiv und explorativ. »One cannot directly relate the estimated trend to a theory or model for the generation of the observed series. Smoothing leads to an estimated trend that is descriptive rather than analytic or explanatory. Because it is not based on an explicit probabilistic model, the method cannot be treated fully and rigorously in terms of mathematical statistics (at least not succinctly)« (Anderson 1971, S. 55).

Beim Komponentenmodell liegt zwar eine stochastische Betrachtungsweise insofern vor, als die »Störungen« (Restgrößen) als Realisationen unabhängiger Zufallsvariablen eingeführt werden. Die Voraussetzungen des Regressionsmodells und hier insbesondere die Annahme, die Störgrößen seien unabhängig voneinander, sind jedoch häufig nicht erfüllt, wie

sehr man auch immer die Vagheit der Trenddefinition ausnutzt und die Gewichtungsschemata variiert. Deshalb »werden diese Methoden nicht als echte Modellanpassung begriffen, sondern nur als vorläufige, heuristische Approximation der Zeitreihe mit dem Ziel der Entdeckung erster Regelmäßigkeiten« (Schlingen u. Streitberg 1984, S.ix). Dennoch muß man einräumen, daß diese deskriptiven Verfahren zur Vorbereitung der Analyse mit komplexeren Verfahren durchaus nützlich sind, weil sie erkennen lassen, was ungefähr in der Reihe »drin steckt«.

Eine neue Betrachtungsweise wird erreicht, wenn die Zeitreihen als Realisierungen stochastischer Prozesse konzipiert werden - z. B. im Rahmen des Box/Jenkins-Ansatzes. Dies wird in einem späteren Artikel noch ausführlich zu erörtern sein. Im nächsten Abschnitt sollen aber schon einige zusätzliche technische Hilfsmittel erläutert werden, die sowohl im Kontext der deskriptiven Analyse als auch bei der Modellierung stochastischer Prozesse nützlich sind - und ohne deren Kenntnis die Fachliteratur zur Zeitreihenanalyse nicht lesbar ist.

## 6. Differenzenbildung und Shift-Operatoren

Ein weiteres Mittel der lokalen Trend- und Saison bereinigung ist die Differenzenbildung. Um zu verdeutlichen, was damit gemeint ist, betrachten wir eine Zeitreihe  $Z_t$ , die exakt einen linearen Trend aufweist:

$$(42) \quad Z_t = a + bt, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

Die ersten fünf Werte  $(z_1, \dots, z_5)$  seien:

$$(4, 4.5, 5, 5.5, 6)$$

Der Steigungsparameter in Gleichung (42) beträgt also  $b=0.5$ . Wir bilden nun eine zweite Reihe durch Anwendung des sog. Differenzenfilters 1. Ordnung (oder 1. »Grades«):

$$(43) \quad \nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1}$$

Die »differenzierte«<sup>(15)</sup> Reihe  $\nabla Z_t$  enthält nun folgende Werte für  $t=2, 3, 4, 5$ :

$$(44) \quad \begin{aligned} \nabla z_2 &= 4.5 - 4 = 0.5 \\ \nabla z_3 &= 5 - 4.5 = 0.5 \\ \nabla z_4 &= 5.5 - 5 = 0.5 \\ \nabla z_5 &= 6 - 5.5 = 0.5 \end{aligned}$$

Die Zeitreihe  $\nabla Z_t$  verliert gegenüber der Originalreihe  $Z_t$  einen Fall; ihr

erster Wert wird mit  $t=2$  indiziert. Sie weist in unserem Beispiel konstant den Betrag 0,5 auf, der mit dem Steigungskoeffizienten  $b$  der Originalreihe identisch ist. Allgemein läßt sich dieses Ergebnis wie folgt ableiten: Wenn Gleichung (42) gilt, dann gilt auch

$$(45) \quad \begin{aligned} Z_{t-1} &= a + b(t-1) \\ &= a + b \cdot t - b \end{aligned}$$

Durch Subtraktion dieses Ausdrucks von Gleichung (42) erhält man

$$(46) \quad \begin{aligned} \nabla Z_t &= Z_t - Z_{t-1} \\ &= a + bt - (a + b \cdot t - b) \\ &= a + b \cdot t - a - b \cdot t + b \\ &= b, \quad t = 2, \dots, n \end{aligned}$$

Durch die Differenzenbildung entfällt also der Ordinatenabschnitt als Niveauparameter  $a$  der Originalreihe. Für die differenzierte Reihe wird der Steigungsparameter  $b$  zum Niveauparameter, und  $Z_t$  ist nicht mehr von  $t$  abhängig. Ein Polynom 1. Grades wird durch einfache Differenzenbildung auf das Polynom nullten Grades reduziert.

Die Originalreihe  $Z_t$  läßt sich durch die inverse Operation der Summenbildung aus der differenzierten Reihe  $\nabla Z_t$  rekonstruieren, wenn man den Anfangswert, hier  $Z_1=4$ , kennt:

$$(47) \quad \bullet \quad z_t = z_1 + \sum_{j=2}^t \nabla z_j \quad t = 2, 3, \dots, n$$

Zum Beispiel ist  $z_2 = 4 + (0.5 + 0.5) = 5$ .

Eine reale Beobachtungsreihe wird natürlich keinen exakten linearen Trend aufweisen, sondern allenfalls um eine Trendgerade streuen. Wir wollen diesen Störbetrag mit dem Symbol  $e_t$  bezeichnen:

$$(48) \quad Z_t = a + b \cdot t + e_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

Bei der Differenzenbildung wird diese Störgröße mit differenziert:

$$(49) \quad \begin{aligned} \nabla Z_t &= Z_t - Z_{t-1} = a + b \cdot t + e_t - (a + b(t-1) + e_{t-1}) \\ \nabla Z_t &= Z_t - Z_{t-1} = a + b \cdot t + e_t - (a + b(t-1) + e_{t-1}) \\ &= b + e_t - e_{t-1} = b + \nabla e_t \end{aligned}$$

Das heißt z. B., daß eine einzige Abweichung der Originalreihe  $Z_t$  von ihrem Trend zu zwei abweichenden Werten mit jeweils entgegengesetztem Vorzeichen in der einfach differenzierten Reihe  $\nabla Z_t$  führt. Betrachten wir nochmals eine Originalreihe in ihren ersten fünf Werten  $(z_1, \dots, z_5) = (4, 4.5,$

5.2, 5.5, 6), so erkennt man bei  $t=3$  eine Abweichung von  $e_t=0,2$  vom linearen Trend. Für die differenzierte Reihe ergeben sich demgemäß folgende Werte:

$$(50) \quad \begin{aligned} \nabla z_2 &= 4.5 - 4 = 0.5 = b \\ \nabla z_3 &= 5.2 - 4.5 = 0.7 = b + e_t \\ \nabla z_4 &= 5.5 - 5.2 = 0.3 = b - e_t \\ \nabla z_5 &= 6 - 5.5 = 0.5 = b \end{aligned}$$

Auch in diesem Beispiel ist der Mittelwert der einfach differenzierten Reihe  $\nabla z_t$  identisch mit dem Steigungskoeffizienten des linearen Trends der Ausgangsreihe  $Z_t$ :

$$(51) \quad b = \overline{\nabla z_t} = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n \nabla z_t$$

Dies muß aber nicht bei allen Reihen der Fall sein.

Als nächstes betrachten wir eine Zeitreihe mit einem quadratischen Trend, lassen aber die Fehlerkomponente wieder außer acht:

$$(52) \quad Z_t = a + b_1 t + b_2 t^2, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

In einem ersten Zahlenbeispiel setzen wir  $b_1=0$ ,  $b_2=1$ ,  $a=0$ . Damit ergibt sich die Folge

$$\{Z_t\} = \{1, 4, 9, 16, \dots, (n-1)^2, n^2\}, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

$$\{\nabla Z_t\} = \{3, 5, 7, \dots, (n^2 - (n-1)^2)\}, \quad t = 2, 3, \dots, n$$

Demnach erhält man die ersten Differenzen

$$\{\nabla Z_t\} = \{3, 5, 7, \dots, (n^2 - (n-1)^2)\}, \quad t = 2, 3, \dots, n$$

Diese Reihe können wir erneut differenzieren

$$\{\nabla^2 Z_t\} = \{2, 2, \dots, 2\}, \quad t = 3, 4, \dots, n$$

Durch die erste Differenzenbildung wird das Trendpolynom 2. Grades zu einem Trendpolynom 1. Grades und durch nochmaliges Differenzieren schließlich zu einer Konstanten (Polynom nullten Grades). Die Konstante entspricht nun dem doppelten Betrag des Steigungskoeffizienten  $b_2$ . Daran ändert sich nichts, wenn man auch für  $b_1$  in Gleichung (52) einen Betrag ungleich Null einsetzt.

Somit kann man die sukzessive Differenzenbildung auch benutzen, um den Grad eines Polynoms zu bestimmen, das man an eine Zeitreihe anpassen möchte. Das ist der Grundgedanke der oben erwähnten **Methode der varierten Differenzen**: Es wird geprüft, wieviele Differenzenbildungen man nacheinander vornehmen muß, bis die Reihe um einen konstanten

Die Differenzenfilter  $p$ -ter Ordnung,  $p > 1$ , sind rekursiv definiert durch

$$(53) \quad \nabla^p Z_t = (\nabla^{p-1} Z_t) - (\nabla^{p-1} Z_{t-1}), \quad t = p+1, p+2, \dots, n$$

Bei  $p=2$  ergibt sich also  $\nabla^2 Z_t = \nabla Z_t - \nabla Z_{t-1}$

$$(54) \quad \begin{aligned} \nabla^2 Z_t &= \nabla Z_t - \nabla Z_{t-1} \\ &= (Z_t - Z_{t-1}) - (Z_{t-1} - Z_{t-2}) \\ &= Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2}; \quad t = 3, 4, \dots, n \end{aligned}$$

Wir wollen dieses Ergebnis anhand der Beispielsreihe

$$\begin{aligned} \{Z_t\} &= \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\} \\ & \quad \nabla Z_3 = (Z_3 - Z_2) - (Z_2 - Z_1) \end{aligned}$$

nachvollziehe

$$(55) \quad \begin{aligned} \nabla^2 Z_3 &= (Z_3 - Z_2) - (Z_2 - Z_1) && \text{erechnen:} \\ &= (9 - 4) - (4 - 1) \\ &= 9 - 8 + 1 \end{aligned}$$

An dieser Stelle ist es sinnvoll, den sog. Shift- (oder Lag-) Operator »B« einzuführen, der die Rechenarbeit erheblich erleichtert und der wie folgt definiert ist:

$$(56) \quad BZ_t = Z_{t-1}$$

Dem »Backward« (oder »Back-«) Shift-Operator  $BZ_t$  steht der »Forward« Shift-Operator

$$(57) \quad B^{-1}Z_t = Z_{t+1}$$

zur Seite. Allgemein gilt:

$$(58) \quad B^p Z_t = Z_{t-p}, \quad p \neq 0$$

Für  $p > 0$  ergeben sich Rückwärts-, für  $p < 0$  Vorwärtsverschiebungen; für  $p=0$  ist die Identität

$$(59) \quad B^0 = 1$$

festgelegt. Mit »B« kann man wie mit normalen Potenzzahlen rechnen. So ist zum Beispiel  $B^p B^q = B^{p+q}$ . Der Differenzenfilter läßt sich mit Hilfe des Shift-Operators wie folgt schreiben:

$$(60) \quad \begin{aligned} \nabla &= (1 - B) \\ \nabla Z_t &= (1 - B)Z_t \\ &= Z_t - Z_{t-1} \end{aligned}$$

Für den Differenzenfilter 2. Ordnung erhält man

$$(61) \quad \begin{aligned} \nabla^2 Z_t &= (1-B)^2 Z_t \\ &= (1-2B+B^2)Z_t \\ &= Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2} \end{aligned}$$

Dies entspricht genau dem Ergebnis von Gleichung (54). Der Exponent des Differenzenoperators **gibt** also an, wie oft der Differenzenfilter angewandt werden soll.<sup>(16)</sup>

Wir hatten oben **demonstriert**, daß das Summieren die zur Differenzenbildung inverse Operation darstellt. Wir wollen nun überlegen, wie sich diese inverse Operation mit Hilfe **des Shift-Operators** darstellen läßt. Dabei führen wir keine mathematisch **exakten** Ableitungen vor, sondern wollen Definitionen und Regeln **lediglich veranschaulichen**.

Um aus der **differenzierten** Reihe  $VZ_t$  ein bestimmtes  $z_{i-1}$  mit  $i > 1$  zu entwickeln, haben wir oben alle Differenzenbeträge von  $Vz_t$  über  $Vz_{i-1}$  bis  $Vz_2$  plus Startwert  $z_1$  summiert:

$$(64) \quad z_i = \nabla z_i + \nabla z_{i-1} + \dots + \nabla z_2 + z_1, \quad i > 1$$

Unter **Verwendung des Shift-Operators** können wir (64) wie folgt schreiben:

$$(65) \quad z_i = \nabla z_i (1 + B + B^2 + \dots + B^{i-2}) + z_1$$

Wir verändern die Summe  $z_i$  nicht, **wenn** wir das Polynom in  $B$  bis »unendlich« erhöhen:

$$(66) \quad z_i = \nabla z_i (1 + B + B^2 + \dots + B^{i-1} + B^i + B^{i+1} + \dots + B^\infty),$$

also formal bis zu dem nicht beobachteten »**Ursprung**« **der Reihe** zurückgehen. Dadurch wird auch der Anfangswert  $z_1$  in das  $B$ -Polynom mit einbezogen. Das ist sinnvoll, weil sich ja auch der erste **Beobachtungswert**  $z_1$  als Summe aller vorausgegangenen, aber nicht beobachteten Veränderungen verstehen läßt, die einem fiktiven Ursprung  $z_{-\infty} = 0$  hinzugefügt wurden. **Wir definieren also allgemein:**

$$(67) \quad z_i = \sum_{s=0}^{\infty} \nabla z_i B^s, \quad i \geq 1$$

Während wir die Differenzenbildung mit  $Z_t = (1-B)Z_t$  bezeichnet haben, können wir die inverse Operation des **Summierens mit**

$$(68) \quad \nabla^{-1}(\nabla Z_t) = (1-B)^{-1}(1-B)Z_t = Z_t$$

ausdrücken. Durch Vergleich von (68) mit (66) erhält man

$$(69) \quad (1-B)^{-1} = (1 + B + B^2 + \dots)$$

(s. Box u. Jenkins 1976, S. 8). Unter Verwendung von (69) können wir (68) auch so schreiben:

$$(70) \quad (1-B)^{-1}\nabla Z_t = \nabla Z_t(1+B+B^2+\dots+B^{t-2}+\dots+B) \\ = (Z_t - Z_{t-1}) + (Z_{t-1} - Z_{t-2}) + \dots + (Z_2 - Z_1) + (Z_1 - Z_0) + \dots = Z_t$$

Dadurch ist Gleichung (69) zwar nicht mathematisch abgeleitet, aber immerhin als plausibel dargelegt worden. Von diesen Regeln des »Invertierens« von Lag-Reihen wird in der Literatur zur Zeitreihenanalyse ausgiebig Gebrauch gemacht (und nur deshalb haben wir sie hier eingeführt).

Durch Differenzenbildung läßt sich nicht nur der lineare <sup>(17)</sup> Trend, sondern auch eine starre Saison eliminieren:

$$(71) \quad \nabla_{12} Z_t = (1-B^{12})Z_t = Z_t - Z_{t-12}$$

Dies können wir leicht nach vollziehen, wenn wir in unserem Beispiel aus dem vorigen Abschnitt die aus den Originalwerten extrahierte konstante Saisonfigur der Arbeitslosenreihe (s. Abb. 17) betrachten: Durch die Subtraktion der standardisierten Saisonwerte  $S_t^{(s)} - S_{t-12}^{(s)}$ ,  $t=13, 14, \dots, n$  entsteht eine Folge von Nullen; denn  $S_t^{(s)} = S_{t-12}^{(s)}$ . Der Index »s« des Differenzenoperator  $\nabla_s^d$  nennt die »Spanne« oder »Periode«, also die Zahl der Intervalle, über die »differenziert« wird. Der **Exponent** »d« ( $d=1,2,\dots$ ) gibt an, wie oft dieser Differenzen **Operator** hintereinander angewendet wird. (Der Exponent  $d=1$  wird in der Regel nicht geschrieben.) Dem Differenzenoperator  $\nabla_s^d$  entspricht der Backshift-Operator  $(1-B)^d$ .

Die Differenzenfilter für Trend und Saison lassen sich auch hintereinanderschalten:

$$(72) \quad \nabla\nabla_{12} Z_t = (1-B)(1-B^{12})Z_t = (1-B-B^{12}+B^{13})Z_t \\ = Z_t - Z_{t-1} - Z_{t-12} + Z_{t-13} = (Z_t - Z_{t-1}) - (Z_{t-12} - Z_{t-13})$$

Man vergleicht also die Änderung gegenüber dem Vormonat mit der entsprechenden Änderung im Vorjahr. Angewandt auf unsere Beispielreihe der Arbeitslosendaten (Abb. 1.8) erhält man nach dieser Transformation eine Restreihe, die in Abb. 20 wiedergegeben ist. In ihr ist keine Saisonkomponente mehr erkennbar. Der lokale Trend ist jedoch mit dem Differenzenfilter 1. Ordnung noch nicht vollständig eliminiert worden (siehe Mitte und Ende der Zeitreihe); möglicherweise reflektieren diese lokalen Trends externe »Interventionen«, Ereignisse oder Maßnahmen, die das Niveau der Reihe beeinflußt haben.

Ein Unterschied zwischen der Differenzenbildung und dem Gleitmittelverfahren ergibt sich vor allem dadurch, daß bei der Differenzenbil-

dung die Restkomponente mit differenziert wird (s. oben die Gleichung (49)). Die allgemeine mathematische Beziehung zwischen der Differenzenbildung und der Trendelimination mittels Polynom Anpassung ist in Leiner (1982, S. 38ff.) dargestellt. Inhaltlich liegt der Unterschied vor allem in folgendem: Beim Glätten einer Reihe werden, wie wir sahen, kurzfristige Schwankungen eliminiert, beim Differenzenbilden werden sie dagegen akzentuiert. Das zeigt sich in Gleichung (50) schon dadurch, daß eine Abweichung vom Trend der Originalreihe zu einer entsprechenden positiven **und** negativen Abweichung in der differenzierten Reihe führt.<sup>(18)</sup> Nicht zuletzt deshalb ist die Differenzenbildung als Mittel der Trendbereinigung unter erhebliche Kritik geraten. Über Tests, mit denen der zulässige Grad der Differenzenbildung ermittelt werden kann, informieren z. B. Schlingen u. Streitberg (1984, S. 210).

Hinzuweisen ist auch auf neuere filtertheoretische Verfahren, die es ermöglichen, Schwingungskomponenten eines bestimmten, vorgegebenen Frequenzbereichs relativ exakt aus einer Zeitreihe zu extrahieren (s. Stier 1978; Schulte 1981; Schmidt 1984). Diese Verfahren sind bisher vor allem zur Saisonbereinigung (s. Stier 1980) sowie in Untersuchungen über »Lange Wellen« der ökonomischen Entwicklung eingesetzt worden (s. Metz 1988; Spree 1991).

### Anhang: Regressionsmodell und gleitende Durchschnitte

Im Haupttext habe ich für einige Beispiele das Verfahren der gleitenden Durchschnitte auf den Regressionsansatz zurückgeführt. Diese Darstellung soll nun mit Hilfe der Matrizen-Schreibweise verallgemeinert werden. Sie ermöglicht es, zu einer beliebigen Polynomfunktion das korrespondierende Gewichtungsschema für die gleitenden Durchschnitte auf einfache Weise zu berechnen.

Für das Regressionsmodell gilt allgemein:

$$(A-1) \quad \begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e} \\ \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}, \quad \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{e} \\ \hat{\boldsymbol{\beta}} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \end{aligned}$$

Die fettgedruckten Großbuchstaben stehen für Matrizen, die fettgedruckten Kleinbuchstaben für Vektoren.

Bei den gleitenden Durchschnitten treten als X-Variablen die Polynome der t-Werte ( $t^0, t, t^2, \dots, t^p$ ) eines Stützbereichs  $n=(2q+1)$  auf. Bei einem Stützbereich von  $n=5$  Meßzeitpunkten und einem Polynom mit dem Ordnungsgrad  $p=2$  beispielsweise erhält man die folgende Matrix der Regressoren (dabei ersetzen wir X durch T):

$$T = \begin{pmatrix} t^0 & t & t^2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{sowie den Vektor } \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

Dem Vektor  $t^0=1$  ist der Koeffizient  $\beta_0$ , also der Ordinatenabschnitt zugeordnet. Als y-Vektor sind die beobachteten Zeitreihenwerte  $z_1, \dots, z_2, \dots, z_q$  des Stützbereichs zu verwenden. Folglich gilt analog zu (A-1):

$$(A-2) \quad \begin{aligned} z &= T\beta + e \\ \hat{z} &= T\beta \end{aligned}$$

und somit

$$(A-3) \quad \beta = (T'T)^{-1}T'z$$

Wollte man diese Koeffizienten zur Gewichtung verwenden, müßte man für den wandernden Stützbereich bei jedem Haltepunkt einen neuen  $\beta$ -Vektor berechnen, da sich der  $z$ -Vektor mit jeder Verschiebung des Stützbereichs ändert. Da aber die Elemente der  $T$ -Matrix (wegen der fortlaufenden Zentrierung des Zeitindexes im jeweiligen Stützbereich) gleich bleiben, läßt sich das Verfahren dennoch so vereinfachen, daß man mit einem konstanten Gewichte-Vektor rechnen kann. Dazu setzen wir (A-3) in (A-2) ein:

$$(A-4) \quad \hat{z} = T\beta = T(T'T)^{-1}T'z = [T(T'T)^{-1}T']z$$

Die Multiplikation läßt sich durchführen, da die Zahl der Spalten ( $p+1$ ) in  $T$  mit der Zahl der Elemente des Vektors  $\beta$  identisch ist. Der Klammerausdruck vor dem  $z$ -Vektor wird zu einer neuen Matrix zusammengefaßt:

$$(A-5) \quad A = T(T'T)^{-1}T'$$

Sie hat  $(2q+1)$  Zeilen und  $(2q+1)$  Spalten. Somit wird aus (A-4)

$$(A-6) \quad \hat{z} = Az$$

Um den Prognosewert  $\hat{z}_0$  (den lokalen Trendwert) zu erhalten, muß man lediglich die Beobachtungswerte  $z_i$ ,  $t=-q, \dots, 0, \dots, q$  mit der mittleren Zeile der Gewichte-Matrix  $A$  multiplizieren. Das wird deutlich, wenn wir die einzelnen Spalten und Zeilen von (A-6) für unser Beispiel mit  $p=2$  und  $(2q+1)=5$  ausschreiben:

$$(A-7) \quad \begin{pmatrix} \hat{z}_{-2} \\ \hat{z}_{-1} \\ \hat{z}_0 \\ \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & \dots & a_{1,5} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{5,1} & \dots & \dots & \dots & a_{5,5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_{-2} \\ z_{-1} \\ z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Das mittlere Element  $\hat{z}_0$  des  $z$ -Vektors läßt sich also aus den beobachteten Zeitreihenwerten wie folgt berechnen:

$$(A-8) \quad \hat{z}_0 = a_{3,1}z_{-2} + a_{3,2}z_{-1} + a_{3,3}z_0 + a_{3,4}z_1 + a_{3,5}z_2$$

$\hat{z}_0$  ist damit eine lineare Funktion aus den Beobachtungen  $z_{-2}, \dots, z_2$ . Die A-Matrix kann gemäß Gleichung (A-5) mit Standard-Computerprogrammen erzeugt werden, wenn man den Stützbereich (also  $2q+1$ ) und den Ordnungsgrad des Polynoms festgelegt hat. Das Gewichtungsschema ergibt sich jeweils aus der mittleren Zeile dieser Matrix.

### Bibliographie

- Anderson, T.W., The statistical analysis of time series, New York u. a.: Wiley, 1971.
- Bohley, P., Statistik, München u. Wien: Oldenbourg, 1985.
- Box, G.E.P./ Cox, D.R., An analysis of transformations, in: Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Vol.26, 1964, S. 211-243.
- Cleveland, W.S./Devlin, S.J./Terpenning, I.J., The SABL seasonal and calendar adjustment procedures, in: O. D. Anderson (ed.), Time series analysis: Theory and practice 1, Amsterdam: North-Holland, 1982.
- Chen, C./Liu, L.-M., Joint estimation of model parameters and outlier effects in time series. Working Paper Series, Scientific Computing Associates, P. O. Box 625, DeKalb, Illinois 60115, USA, 1990.
- Ertel, S., Patterns of scientific evolution: Short term cycles and secular waves, in: H. Best/E. Mochmann/M. Thaller (Hrsg.), Computers in the humanities and the social sciences, München u. a.: Saur 1991, S. 109 - 117.
- Härtung, J./Elpelt, B./Klößener, K.-H., Statistik. Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik, München u. Wien 1986<sup>1</sup>.
- Hofer, von H./Tham, H.: General deterrence in a longitudinal perspective. A Swedish case: Theft, 1841 - 1985.

- Kendall, M.G., Time-Series, New York: Hafner, 1973.
- Kerlinger, F. N./Pedhazur, E. J., Multiple regression in behavioral research, New York u. a. 1973.
- Leiner, B., Einführung in die Zeitreihenanalyse, München u. Wien: Oldenbourg, 1982.
- Metz, R., Ansätze, Begriffe und Verfahren der Analyse ökonomischer Zeitreihen, in: Historical Social Research/ Historische Sozialforschung, Vol. 13, 1988, S. 23 - 103.
- Metz, R., Re-Examination of long waves in aggregate production series, in: A. Kleinknecht/E. Mandel/I. Wallerstein (Hrsg.), New findings in long wave research, London: Macmillan 1992.
- Mohr, W., Grobidentifikation und Modellvergleich bei ARIMA-Modellen (mit einer Fallstudie für die Reihe der Arbeitslosen in der BRD), in: Allgemeines Statistisches Archiv 64, 1980, S.164-182.
- Parzen, E. (Hg.), Time series analysis of irregularly observed data, New York u.a.: Springer 1984.
- Schlingen, R./ Streitberg, B.H.J., Zeitreihenanalyse, München u. Wien, 1984 (3. Aufl. 1990).
- Schmidt, R., Konstruktion von Digitalfiltern und ihre Verwendung bei der Analyse ökonomischer Zeitreihen, Bochum: Studienverlag Brockmeyer, 1984.
- Schmitz, B., Zeitreihenanalyse in der Psychologie, Weinheim: Beltz, 1987.
- Schneider, W., Der Kaimanfilter als Instrument zur Diagnose und Schätzung variabler Parameter in Ökonometrischen Modellen, Heidelberg u. Wien: Physica Verlag, 1986.
- Schulte, H., Statistisch-methodische Untersuchungen zum Problem langer Wellen, Königstein/Ts. 1981.
- Spitzer, J. J., A primer on Box-Cox estimation, in: The Review of Economics and Statistics 64, 1982, S. 307 - 313.
- Spree, R., Lange Wellen. Historical Social Research/ Historische Sozialforschung, Supplement No. 4, Köln 1991.
- Stahl, H., Stochastische Prozesse II, Vorlesungsskript. Berlin: Technische Universität, ohne Datum.
- Stier, W., Konstruktion und Einsatz von Digitalfiltern zur Analyse und Prognose ökonomischer Zeitreihen, Opladen: Westdeutscher Verlag, 1978.
- Stier, W., Verfahren zur Analyse saisonaler Schwankungen in ökonomischen Zeitreihen, Berlin u. a.: Springer, 1980.
- Stier, W., Grundlagen, Konzepte und neue Methoden der Zeitreihenanalyse, in H. Best/H. Thome (Hrsg.), Neue Methoden der Analyse historischer Daten, St. Katharinen: Scripta Mercaturae 1991, S. 201 - 238.
- Thome, H., Grundkurs Statistik für Historiker, Teil II: Induktive Statistik und Regressionsanalyse, Historical Social Research/Historische Sozialforschung, Supplement No. 3, 1990.

- Thome, H., Modelling and testing interactive relationships within regression analysis, Historical Social Research/Historische Sozialforschung, Vol. 16, 1991, H. 4, S. 21 -50.
- Thome, H., Modelling outliers and missing values in time series analysis. Paper presented at the ISA International Conference on Social Science Methodology, 22. - 26. 6. 1992, Trento, Italien.
- Weichselberger, K., Über eine Theorie der gleitenden Durchschnitte und verschiedene Anwendungen dieser Theorie, in: *Metrika* 8, 1964, S. 185 -230.

### Anmerkungen

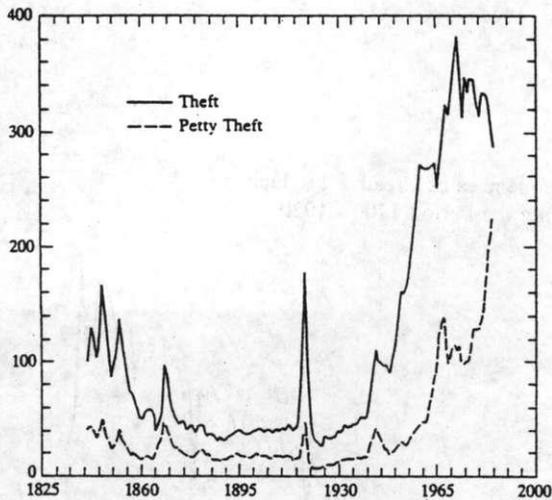
- (1) Gelegentlich fehlende Werte sind durch geeignete Verfahren (s. unten) zu interpolieren. Zeitreihenanalytische Verfahren für nicht gleich abstand ige Meßzeitpunkte werden in Parzen (1983) behandelt.
- (2) Wenn man die Varianz von Stichprobendaten als erwartungstreuen Schätzer für die Streuung in der entsprechenden Population verwenden will, muß die Summe der Abweichungsquadrate bekanntlich nicht durch  $n$ , sondern durch  $n-1$  dividiert werden.
- (3) In der Literatur findet man für die Autokovarianz auch eine leicht abgewandelte Definitionsgleichung, in der nicht durch die Anzahl  $(n-k)$  der Datenpaare, sondern durch die Gesamtzahl  $n$  der beobachteten Fälle dividiert wird. Diese Korrektur ist schätztheoretisch begründet (siehe Schlittgen u. Streiberg 1984, S. 5ff.). Die modifizierte Formel ist anzuwenden, wenn man die beobachtete Zeitreihe als Stichprobe auffaßt, auf deren Basis die Autokovarianz eines »stochastischen Prozesses« geschätzt werden soll. Bei großem  $n$  und kleinem  $k$  ist der Unterschied praktisch bedeutungslos.
- (4) Zur Behandlung von »Ausreißern« s. Bohley (1985, S. 244f.); Schmitz (1987, S. 56 ff.); Schlittgen u. Streiberg (1984, S. 8). Die erwähnten ad-hoc Verfahren sind vom statistischen Standpunkt aus problematisch. Im Rahmen der ARIMA-Modellierung nach Box u. Jenkins (wird in einem späteren Artikel vorgestellt) haben Chen u. Liu (1990) inzwischen ein sehr elaboriertes Verfahren der Modellierung von Ausreißern und fehlenden Werten entwickelt (s. Thome 1992). Das Programm System SPSS7 TREND bietet die Möglichkeit, fehlende Werte mit Hilfe des sog. Kaiman-Filters (siehe Schneider 1986) bei der Schätzung zu berücksichtigen.
- (5) Die Terminologie wird in der Literatur nicht einheitlich gehandhabt. Prozesse oder Prozeßkomponenten (wie z. B. der Trend), die durch ein Polynom  $p$ -ten »Grades« charakterisiert sind, bezeichnet man auch als Prozesse  $p$ -ter »Ordnung«.

- (6) Für asymmetrische Gewichtungsschemata siehe Weich selber ger (1964)
- (7) Der irreguläre Zacken Mitte 1979 entstand durch einen Kodierungsfehler
- (8) Man mag auf den Gedanken kommen, die Punktwolke des SMD durch eine Regressionsgerade zu interpretieren und davon die Wahl des Lambda abhängig zu machen. Im allgemeinen empfiehlt sich dieses Verfahren jedoch nicht, da die Steigung der Geraden stark durch einzelne Ausreißer beeinflusst sein kann. Ein Signifikanztest für den Steigungskoeffizienten wäre ebenfalls wenig aussagekräftig, da sein Ergebnis zu stark von der Zahl der Fälle, also der Menge partieller arithmetischer Mittel, abhinge.
- (9) Die Ausarbeitung dieses Abschnittes - wie auch des Anhangs - profitierte von einem Vorlesungsmss. von Dr. Herbert Stahl, Technische Universität Berlin.
- (10) Für Gesichtspunkte zur Wahl des Stützbereichs s. Bohley (1985, S. 251 f.).
- (11) Die einzelnen Monate haben nicht die gleiche Zahl von Tagen und Teiertagen. Derartige Kalendereffekte wirken ebenfalls geringfügig auf die Saisonfigur ein. Für Verfahren, diese Effekte zu modellieren und die Zeitreihe entsprechend zu bereinigen s. Cleveland, Devlin u. Terpenning (1982) oder die Literaturhinweise in Schlingen u. Streitberg (1984, S. 65).
- (12) Der »Modulus« (mod) bezeichnet den Teilerrest, hier den Rest von  $(t-6)/12$ . So ist z. B.  $s^{(t)} \bmod(12) = 2 = S^{(t)} \bmod(12)$ , denn  $2:12=0$  »Rest 2« und  $14:12=1$  »Rest 2«.
- (13) Siehe Stier (1980) zur Analyse nicht-konstanter Saisonkomponenten.
- (14) Zum Begriff des »Filters« s. Schlittgen u. Streitberg (1984; S.25ff.).
- (15) Der Differenzenoperator  $V$  wird in der Literatur häufig auch mit dem griechischen Delta,  $\Delta$ , symbolisiert. Wir folgen hier der allgemeinen Regel, wonach  $\Delta Z_t = Z_{t+1} - Z_t$  (»Vorwärtsdifferenz«) und  $VZ_t = Z_t - Z_{t-1}$  (»Rückwärtsdifferenz«) ist. In der Fachliteratur wird die Differenzenbildung auch als »Filterung« einer Zeitreihe angesehen, da es sich hierbei ebenfalls - wie beim Gleitmittelwert - um die Anwendung eines Gewichtungsschemas (mit den Gewichten 1 und -1) handelt (s. Schlittgen u. Streitberg 1984, S. 128).
- (16) Man spricht hier auch von der »Faltung« eines oder mehrerer Filter. Das mehrmalige sukzessive Anwenden eines Filters führt zum gleichen Ergebnis, wie das einmalige Anwenden des mit sich selbst oder der miteinander multiplizierten Gewichtungsschemata (s. Schlittgen u. Streitberg 1984, S. 31).
- (17) Gemeint ist hier Linearität »in den Parametern«, nicht in den Variablen (s. oben). Der exponentielle Trend (s. Gleichung (17)) läßt sich nicht durch Differenzenbildung eliminieren.

- (18) Allgemein läßt sich bei frequenzanalytischer Betrachtung zeigen, daß durch das Differenzieren niedrigere Frequenzen (also lange Wellen) herausgefiltert werden und hohe Frequenzen größere Dichtewerte erhalten.

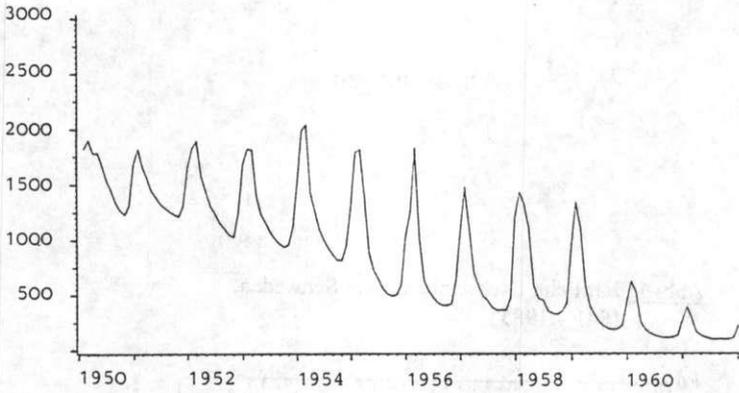
## Abbildungen

Abb. 1: Jährliche Diebstahlsraten in Schweden,  
1841 - 1985

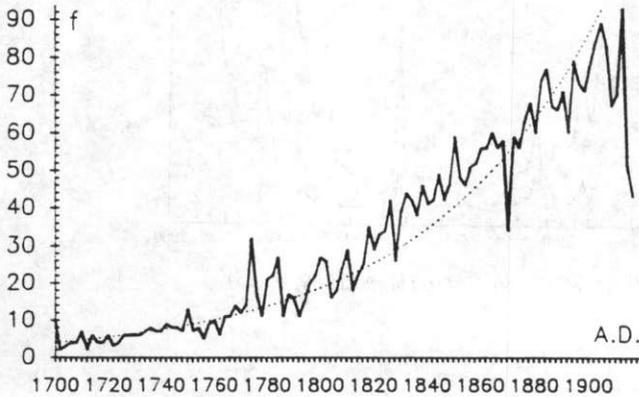


Quelle: Von Hofer/Tham (1989, S. 35)

**Abb. 2:** Arbeitslose (in Tausend) in der BRD,  
Jan. 1950 bis Dez. 1961

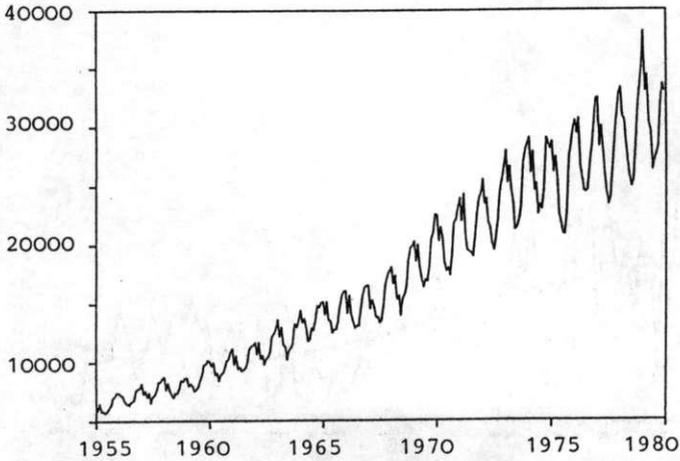


**Abb. 3:** Raw Frequencies of Creative Products by  
Year During the Period 1700 - 1920



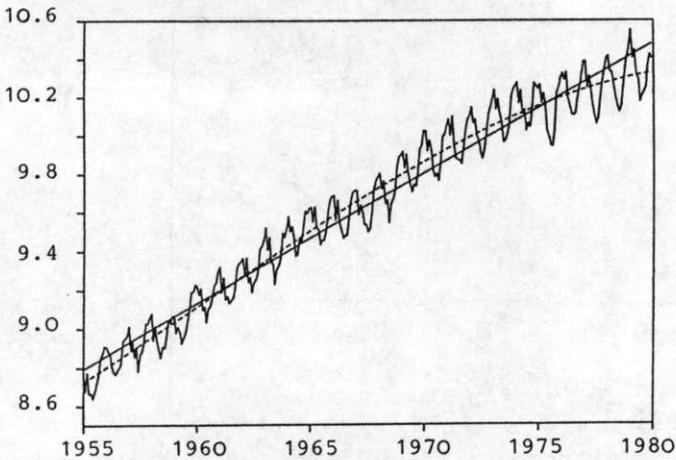
*Quelle: Ertel (1991, S. 111)*

**Abb. 4a:** Produzierter Strom in der BRD (in Mio kWh)



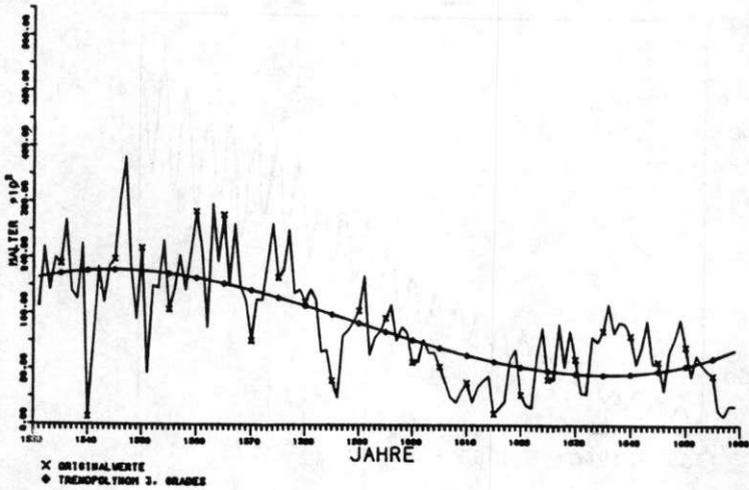
*Quelle: Schlittgen/Streitberg (1984, S. 11)*

**Abb. 4b:** Logarithmierte Stromdaten und lineare sowie kubische Trendkurve



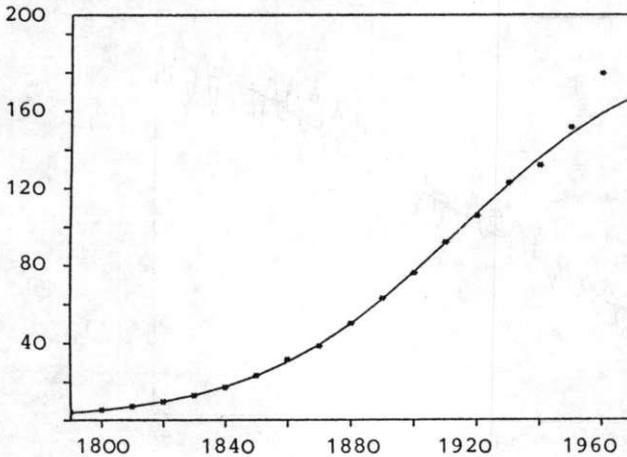
*Quelle: Schlittgen/Streitberg (1984, S. 17)*

**Abb. 5:** Roggenmengen in Köln mit Trendpolynom  
3. Grades, 1830 - 1960



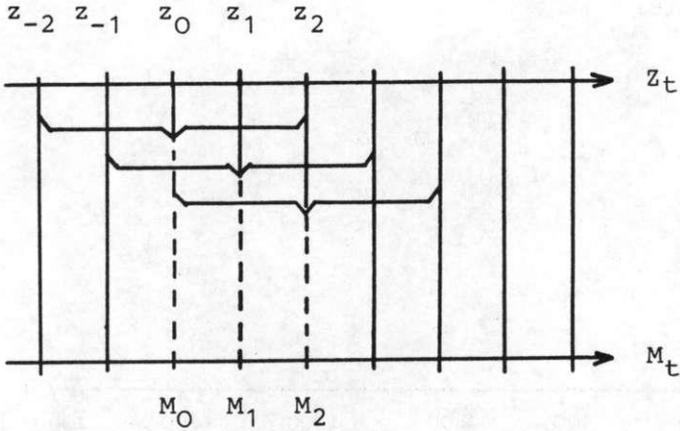
*Quelle: Metz (1988, S.31)*

**Abb. 6:** Logistisches Wachstum der US-Population

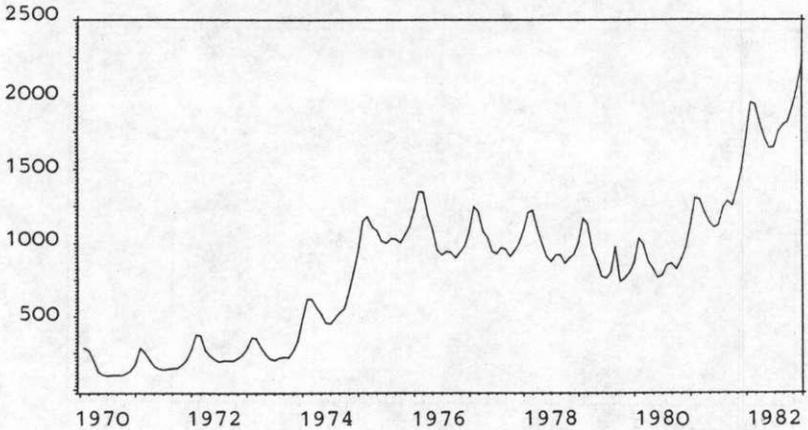


*Quelle: Schlittgen/Streitberg (1984, S. 24)*

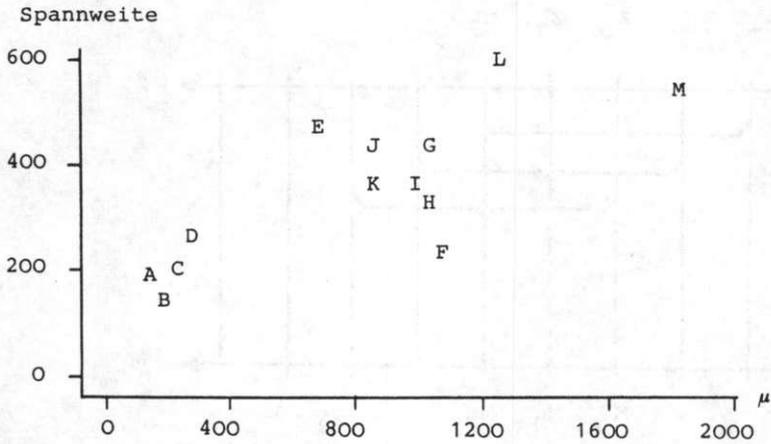
**Abb. 7:** Bildung von gleitenden Mittelwerten mit einem Stützbereich über 5 Meßzeitpunkte



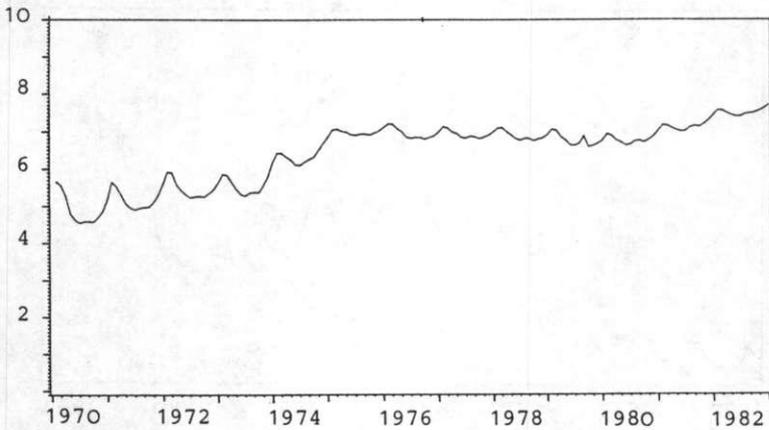
**Abb. 8:** Arbeitslose (in Tausend) in der BRD, Jan. 1970 bis Dez. 1982



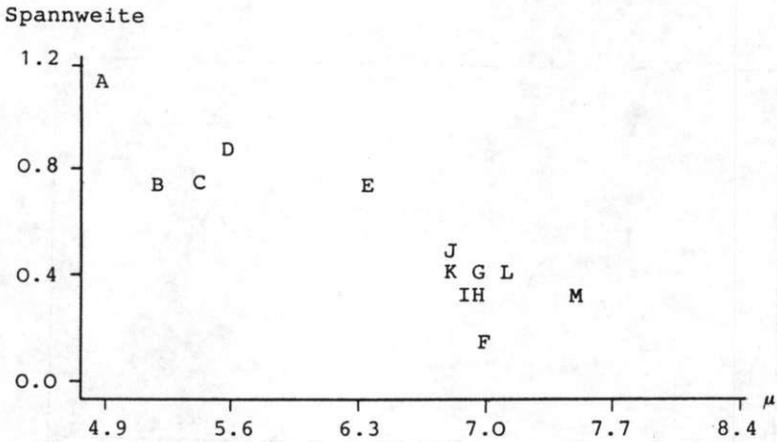
**Abb. 9:** Spannweite-Mittel-Diagramm zu Abb. 8



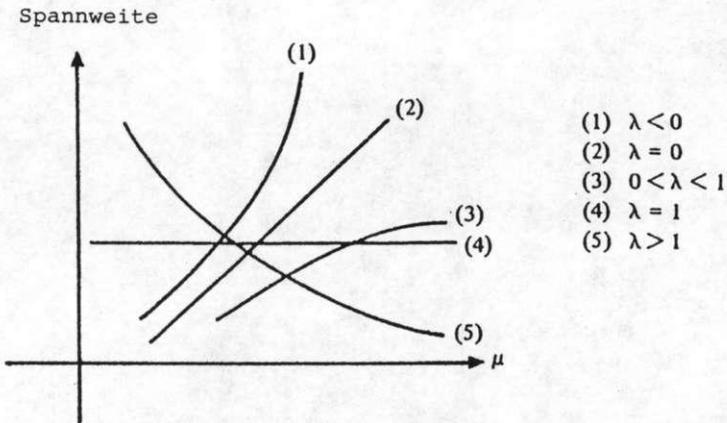
**Abb. 10:** Natürlicher Logarithmus der Arbeitslosenzahlen in der BRD, Jan. 1970 bis Dez. 1982



**Abb. 11:** Spannweite-Mittel-Diagramm zu Abb. 1.10

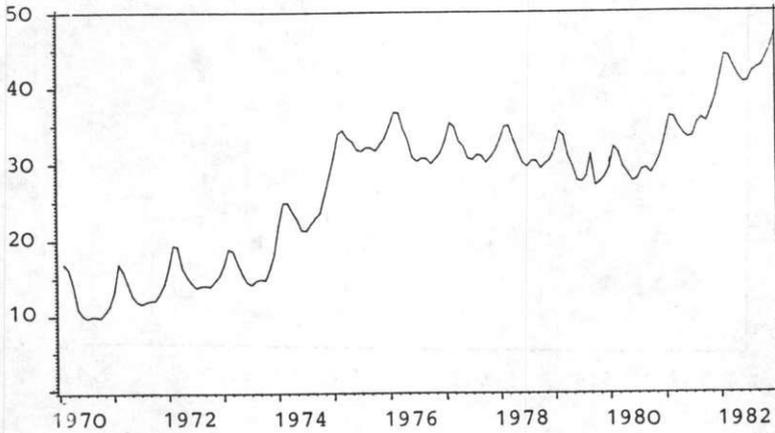


**Abb. 12:** Typische Ausprägungen im SMD

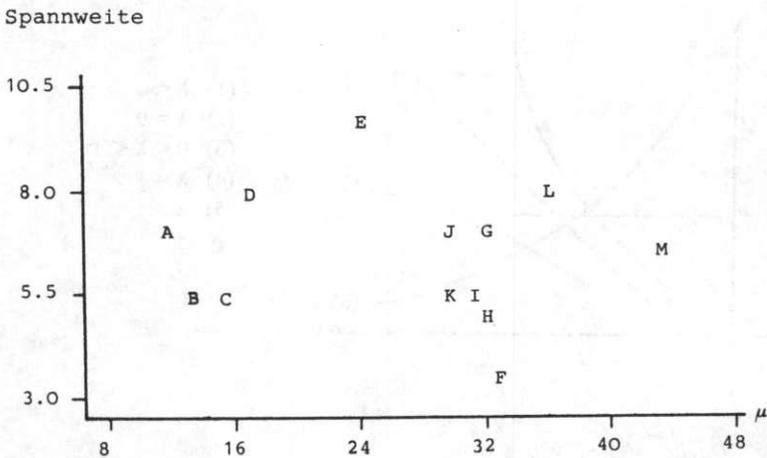


Quelle: Mohr (1980, S. 169)

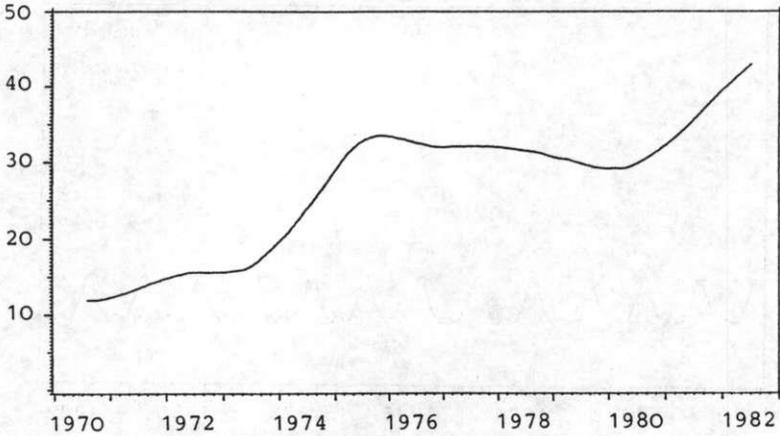
**Abb. 13:** Wurzeltransformierte Arbeitslosenzahlen  
in der BRD, Jan 1970 bis Dez. 1982



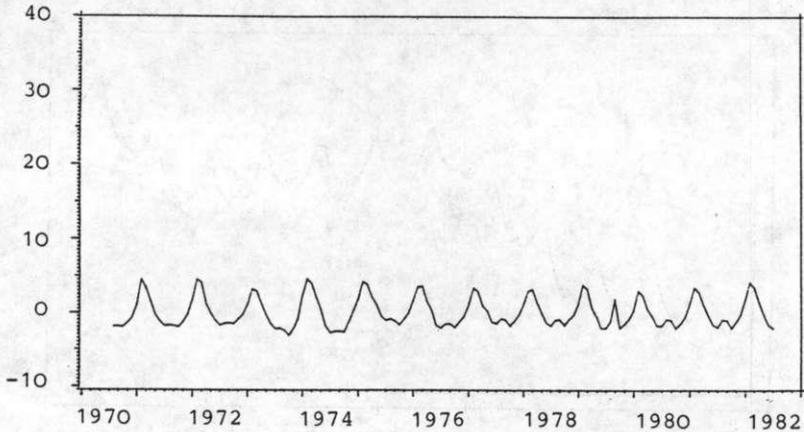
**Abb. 14:** Spannweite-Mittel-Diagramm zu Abb. 13



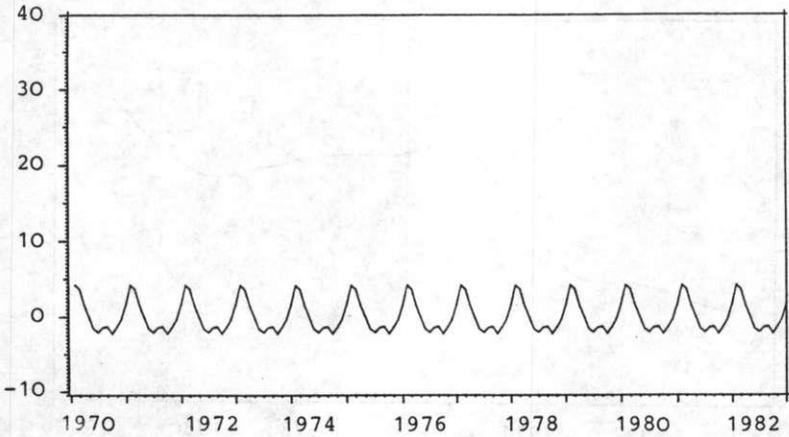
**Abb. 15:** Trendverlauf (gleitender zwölfgliedriger Durchschnitt) der wurzeltransformierten Arbeitslosen­daten



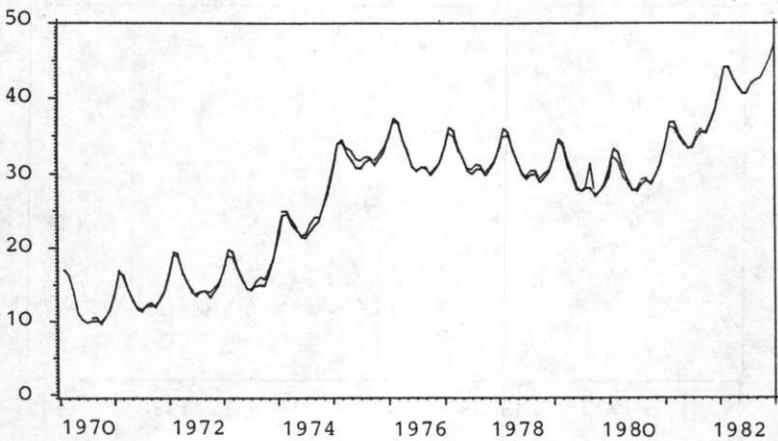
**Abb. 16:** Trendbereinigte Reihe der wurzeltransformierten Arbeitslosen­daten von Abb. 13



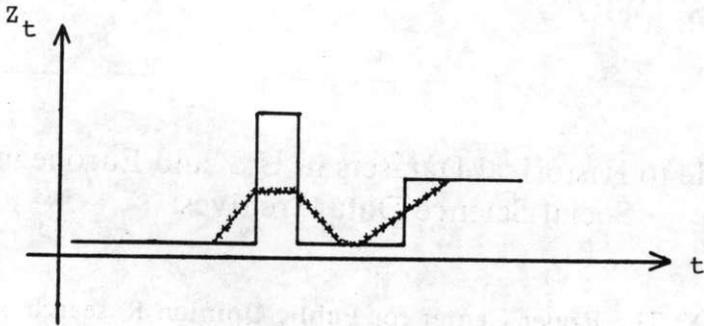
**Abb. 17:** Standardisierte Saisonkomponente der wurzeltransformierten Arbeitslosenzahlen



**Abb. 18:** An wurzeltransformierte Arbeitslosenzahlen angepaßte Trend- und Saisonkomponente



**Abb. 19:** Glättung von Sprüngen durch gleitende Durchschnitte



**Abb. 20:** Einfach und saisonale "differenzierte" Arbeitslosendaten, BRD Jan. 1970 bis Dez. 1982

