

### Der Einsatz des Hodrick-Prescott Filters zur Trendbestimmung in ökonomischen Zeitreihen

Metz, Rainer

Veröffentlichungsversion / Published Version

Zeitschriftenartikel / journal article

Zur Verfügung gestellt in Kooperation mit / provided in cooperation with:

GESIS - Leibniz-Institut für Sozialwissenschaften

#### Empfohlene Zitierung / Suggested Citation:

Metz, R. (1996). Der Einsatz des Hodrick-Prescott Filters zur Trendbestimmung in ökonomischen Zeitreihen. *Historical Social Research*, 21(2), 48-80. <https://doi.org/10.12759/hsr.21.1996.2.48-80>

#### Nutzungsbedingungen:

Dieser Text wird unter einer CC BY Lizenz (Namensnennung) zur Verfügung gestellt. Nähere Auskünfte zu den CC-Lizenzen finden Sie hier:

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>

#### Terms of use:

This document is made available under a CC BY Licence (Attribution). For more information see:

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0>

# Der Einsatz des Hodrick-Prescott Filters zur Trendbestimmung in ökonomischen Zeitreihen

*Rainer Metz\**

**Abstract:** Estimation of the trend component in economic time series is one of the most difficult task within time series analysis. The paper discusses in detail the Hodrick-Prescott filter which is widely used to extract cyclical movements about trend in macro-economic time series. The filter is based on the assumption that nonstationary movements in time series are captured by smooth and slowly changing trends. It is shown that mechanical detrending of time series containing a stochastic trend, based on the Hodrick-Prescott filter can lead to spurious cycles, an this point is illustrated with simulated series.

## Problemstellung

Bei der Analyse ökonomischer/historischer Zeitreihen ist die Bestimmung des Trends seit langem eines der schwierigsten und neben der Saisonanalyse auch eines der meist diskutierten Probleme.<sup>1</sup> Trotz eines immensen Forschungsaufwandes gibt es gegenwärtig weder eine exakte Definition des Trends noch ein allgemein akzeptiertes Verfahren um diesen darzustellen.<sup>2</sup> Die Probleme wer-

---

\* Address all Communications to Rainer Metz, Zentralarchiv für Empirische Sozialforschung, Abt. ZHSF, Universität zu Köln, Liliencronstr. 6, D-50931 Köln.

Überarbeitete und erweiterte Fassung eines Vortrages, den der Verfasser anlässlich des ZHSF-Workshops: 20 Jahre QUANTUM, vom 4.-7. Oktober 1995 in Köln, im Rahmen der 34. Sitzung der Arbeitsgruppe *Prognoseverfahren* der Deutschen Gesellschaft für Operations Research (DGOR) gehalten hat. Den Teilnehmern der Arbeitsgruppe, insbesondere Karl-August Schäffer (Köln), bin ich für zahlreiche Diskussionsbeiträge dankbar. Ralf Pauly (Osnabrück), Bernd Schips (Zürich) und Hermann Garbers (Zürich) bin ich für wertvolle Kommentare, den Teilnehmern des Forschungsseminars »Quantitative Methoden in der Ökonomie«, das im Sommersemester 1995 an der Universität und der ETH Zürich stattgefunden hat, für eine anregende Diskussion ebenfalls zu Dank verpflichtet. Mein besonderer Dank gebührt Winfried Stier (St. Gallen), der meine Arbeiten nun schon seit vielen Jahren mit Sachkenntnis, Engagement und Interesse in einer weit über das normale Maß hinausgehenden Weise unterstützt und begleitet hat.

<sup>1</sup> »The problem of defining the trend of an economic time series is one of the most

wandes gibt es gegenwärtig weder eine exakte Definition des Trends noch ein allgemein akzeptiertes Verfahren um diesen darzustellen.<sup>2</sup> Die Probleme werden auch dann nicht einfacher, wenn man versucht, statistisches Konzept und ökonomische Theorie zu verbinden. Definiert man z.B. den Trend als die empirische Ausprägung der Wachstumskomponente, die die Veränderung des Potentialwachstums einer Volkswirtschaft repräsentiert, dann hängt die Ausprägung der Trendkomponente davon ab, welche Annahmen die jeweilige ökonomische Theorie über dieses Wachstum macht. Zudem sind die meisten ökonomischen Begriffe nicht so exakt definiert, daß sie sich ohne Weiteres in einer für die statistische Darstellung notwendigen Form operationalisieren lassen.

Geht man davon aus, daß sich eine Zeitreihe in eine Trendkomponente T, und eine Konjunkturkomponente C, zerlegen läßt, dann kann man die Zeitreihe wie folgt schreiben:

$$Y_t = T_t + C_t \quad [1]$$

Da sich lediglich eine Reihe, nämlich  $Y_t$ , beobachten läßt, spricht man hier von nichtbeobachtbaren Komponenten («unobserved components»), für die uns immer nur Schätzungen zur Verfügung stehen.<sup>3</sup> Rechnerisch ist eine solche Aufteilung nur möglich, wenn man bestimmte Annahmen über die Eigenschaften der Komponenten macht, also diese definiert.

Grundsätzlich gibt es zwei Möglichkeiten der Trendbestimmung. Einmal wird ein bestimmtes stochastisches oder deterministisches Modell spezifiziert, dessen Parameter dann zu schätzen sind. Zum anderen wird für die einzelnen Komponenten ein bestimmter Schwingungs- bzw. Frequenzgehalt definiert und dieser dann aus der vorliegenden Zeitreihe herausgefiltert, weshalb man hier auch von Frequenzfiltern spricht. Für das Verständnis der folgenden Ausführungen zum Hodrick-Prescott Filter ist zunächst eine kurze Erörterung der modellbasierten Ansätze notwendig, wobei wir uns auf die beiden gegenwärtig bedeutsamsten stochastischen Modelle beschränken. Vor diesem Hintergrund soll dann die Konstruktion und Wirkungsweise des Hodrick-Prescott Filters ausführlicher behandelt werden. Diesem Verfahren wird gegenwärtig vor allem in Zusammenhang der Theorie *Realer Konjunkturzyklen* eine herausragende Bedeutung beigemessen. Besondere Beachtung verdient die Behauptung, daß sich dieser Filter auch für die Darstellung stochastischer Trends eignen würde.

---

difficult matters we encounter on the threshold of an analysis of economic time series.« (Davies 1941, zit. nach Wolters 1990, S. 22).

<sup>2</sup>Maravall (1993, S. 5): »The concept of a trend component (in short, a trend) in an economic time series is far from having a precise, universally accepted definition.«

<sup>3</sup>So auch Maravall (1993, S. 7): »Since the trend component is never observed, one always works with estimators.«

## Stochastische Trendmodelle

Stochastische Trendmodelle, bei denen der Zufall als Bestimmungskomponente der langfristigen Wirtschaftsentwicklung systematisch berücksichtigt wird, spielen gegenwärtig vor allem in der Zeitreihenanalyse und Ökonometrie eine zentrale Rolle. Die Diskussion stochastischer Trendmodelle wurde auf breiter Front durch die vielbeachteten Studien von Nelson/Plosser (1982) und Long/Plosser (1983) ausgelöst. Danach muß sowohl theoretisch als auch empirisch von einem stochastischen Trend ausgegangen werden.

In seiner einfachsten Form läßt sich ein stochastischer Trend leicht formalisieren. Das Produktionsergebnis eines Jahres sei  $Y_t$ , das des vorangegangenen  $Y_{t-1}$ , die durchschnittliche Wachstumsrate  $\mu$  und der Zufallseinfluß  $\varepsilon_t$ .  $Y_t$  läßt sich damit schreiben als:

$$Y_t = \mu + Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad [2]$$

wobei  $\varepsilon_t$  als seriell unabhängiger Zufallsprozeß mit Mittelwert 0 und Varianz  $\sigma_\varepsilon^2$  aufgefaßt wird. In der Statistik werden solche Entwicklungen als »Random Walk«-Prozesse bezeichnet. Ist die durchschnittliche Wachstumsrate  $\mu = 0$ , spricht man auch von einem Random Walk ohne Drift. Bei  $\mu \neq 0$  handelt es sich dagegen um einen Random Walk mit Drift, dessen Verlauf wesentlich durch das Verhältnis  $\mu/\sigma_\varepsilon^2$  geprägt ist, da der Drift-Parameter eine deterministische Trendkomponente impliziert, die den Reihenverlauf umso stärker beeinflusst, je größer das Verhältnis  $\mu/\sigma_\varepsilon^2$  ist.

Die Wurzel der charakteristischen Gleichung von [2] ist +1. Sie liegt also auf dem aus der Darstellung komplexer Zahlen bekannten Einheitskreis (daher der Name Einheitswurzel oder »Unit Root«). Solche Prozesse, also Prozesse, die in ihrem autoregressiven Term eine Einheitswurzel aufweisen, werden seit Nelson und Plosser als differenzstationäre Prozesse 1. Ordnung bezeichnet. Der einfachste Fall ist der Random Walk. Die Bezeichnungen »Random Walk«-Prozeß, »Unit Root«-Prozeß, differenzstationärer Prozeß (DS-Prozeß) und stochastischer Trend werden daher häufig äquivalent verwendet.

Formt man Gleichung [2] in

$$Y_t - Y_{t-1} = \mu + \varepsilon_t \quad [3]$$

um, so sieht man an der rechten Seite, daß die differenzierte Reihe,  $Y_t - Y_{t-1}$ , nur noch aus einer Folge von Zufallsvariablen besteht. Solche Folgen bzw. Reihen, die keinerlei innere Struktur aufweisen, deren Werte also rein zufällig aufeinander folgen, nennt man weißes Rauschen oder »White Noise«.

Würden ökonomische Reihen tatsächlich nur aus einem stochastischen Trend bestehen, müßten ihre 1. Differenzen weißes Rauschen ergeben. Meist tun sie das nicht, sondern weisen noch serielle Abhängigkeiten auf. In diesem Fall sind die 1. Differenzen ein korrelierter stationärer Prozeß, der sich häufig durch einfache »Autoregressive Moving-Average-Prozesse« so modellieren läßt, daß

die Residuen wiederum »White Noise«-Eigenschaften aufweisen. Allgemein werden differenzstationäre Prozesse 1. Ordnung daher in der Form

$$Y_t = \mu + Y_{t-1} + e_t \quad [4]$$

$$\phi(B)e_t = \theta(B)\varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

geschrieben, wobei  $\phi(B)$  und  $\theta(B)$  stabile Lag-Polynome in  $B$ ,  $B$  den Backshift-Operator und  $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$  einen normalverteilten »White Noise«-Prozeß mit Erwartungswert Null und Varianz  $\sigma_\varepsilon^2$  bezeichnen. Die Gleichung [4] entspricht einem »Autoregressiven Integrierten Moving-Average-Prozeß«, der auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$\phi(B)(1 - B)^d Y_t = \mu + \theta(B)\varepsilon_t \quad [5]$$

wobei »d« den Grad der Differenzenbildung angibt. Ein solcher Prozeß wird nach Box/Jenkins (1976) als ARIMA(p,d,q)-Prozeß bezeichnet, der durch das Tripel (p,d,q) vollständig charakterisiert ist. Bei integrierten Prozessen, die  $d$  Einheitswurzeln besitzen, spricht man auch von einer homogenen Nichtstationarität vom Grade  $d$ .

Für die Zerlegung einer Zeitreihe in einzelne Komponenten gibt es nun eine Vielzahl von Möglichkeiten, wobei gegenwärtig den Verfahren nach Beveridge/Nelson (1981) und Harvey (1985) die wohl größte Bedeutung zukommt. Beveridge und Nelson haben gezeigt, daß jede Zeitreihe, die eine homogene Nichtstationarität vom Grad Eins aufweist, in eine stationäre Reihe und in einen Random Walk zerlegt werden kann, so daß der stochastische Trend in ARIMA(p,l,q)-Modellen einem Random Walk mit Drift entspricht.

Eine andere Möglichkeit der Zerlegung einer Reihe bieten die strukturellen Zeitreihenmodelle.<sup>4</sup> Ähnlich wie traditionelle Komponentenmodelle basieren strukturelle Zeitreihenmodelle auf der Vorstellung des Zusammenwirkens mehrerer voneinander unabhängiger Komponenten, wie z.B. Trend, Zyklus, Saison und irregulärer Komponente. Allerdings wird im Unterschied zum traditionellen Komponentenmodell auch der Trend als stochastischer Prozeß modelliert. Strukturelle Zeitreihenmodelle gehören zur Klasse der sogenannten Zustandsraummodelle (»State space models«), die wiederum zu den »Unobserved Components« ARIMA-Modellen (UC-ARIMA) gehören.<sup>5</sup> Im strukturellen Zeitreihenmodell wird für die zu analysierende Zeitreihe explizit eine bestimmte Komponentenstruktur aufgrund spezieller a priori Hypothesen formuliert.

Ein häufig verwendetes Modell ist das »Trend plus Zyklus«-Modell (TZ-Modell), das sich folgendermaßen schreiben läßt:

\* Vgl. neuerdings Pauly (1995), der im Zusammenhang struktureller Zeitreihenmodelle auch den Hodrick-Prescott Filter eingehend behandelt.

<sup>4</sup> Garcia-Ferrer/del Hoyo (1992, S. 647). Einen guten Überblick über Zustandsraummodelle gibt Fahrmeier (1991).

$$Y_t = T_t + C_t + v_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad [6]$$

wobei  $Y_t$  die Zeitreihe (meist deren Logarithmus),  $T_t$  den Trend,  $C_t$  den Zyklus und  $v_t$  die irreguläre Komponente darstellen. Die Trendkomponente  $T_t$  wird als lokal linearer Trend<sup>6</sup> modelliert:

$$\begin{aligned} T_t &= T_{t-1} + \mu_{t-1} + \eta_t, & \eta_t &\sim \text{NID}(0, \sigma_\eta^2) \\ \mu_t &= \mu_{t-1} + \zeta_t, & \zeta_t &\sim \text{NID}(0, \sigma_\zeta^2) \end{aligned} \quad [7]$$

Dabei ist  $\mu_t$  die Wachstumsrate (»Slope«), die üblicherweise als »Drift« bezeichnet wird.  $\eta_t$  und  $\zeta_t$  sind unkorrelierte »White Noise«-Prozesse<sup>7</sup> und NID steht für *normally, independently distributed*. Während die Varianz von  $\eta_t$  das Trendniveau (»Level«) beeinflusst, wirkt sich die Varianz von  $\zeta_t$  auf die Wachstumsrate des Trends (»Slope«), also auf seine Steigung aus. Ist in diesem Modell sowohl  $\sigma_\zeta^2$  als auch  $\sigma_\eta^2$  größer Null, ergibt die erste Differenz der Trendkomponente keinen »White Noise«-Prozeß, wie das beim Random Walk der Fall ist, sondern wiederum einen Random Walk. Mit anderen Worten, die Wachstumsrate des Trends ist nicht stationär, sondern integriert vom Grade Eins. Solche Trends werden als integrierte »Random Walk«- oder als I(2)-Prozesse bezeichnet, da sie zwei Mal differenziert werden müssen, um die Nichtstationarität zu beseitigen.<sup>8</sup> Setzt man eine oder beide Varianzen in [7] gleich Null, lassen sich mit diesem Modell auch andere Trendformen darstellen. Ist  $\sigma_\zeta^2$  gleich Null, ist  $\mu_t$  eine Konstante, und der Trend entspricht einem Random Walk mit Drift. Ist  $\sigma_\eta^2$  gleich Null, entspricht der Trend einem I(2)-Prozeß, der i.d.R. einen glatten Verlauf aufweist. Sind beide Varianzen, also  $\sigma_\zeta^2$  und  $\sigma_\eta^2$ , gleich Null, handelt es sich um einen linearen Trend. Die zyklische Komponente wird als stationärer stochastischer Prozeß so formuliert, daß damit auch pseudozyklische Schwingungen modelliert werden können.

Als Vorzug dieser modellbasierten Verfahren wird die Tatsache gesehen, daß dem stochastischen Trend eine explizites Modell zugrunde liegt, das so festgelegt werden kann, daß es der stochastischen Struktur der Reihe entspricht, m.a.W., man geht davon aus, daß das stochastische Trendmodell der Struktur der jeweiligen Reihe genau angepaßt werden kann.

<sup>6</sup> Vgl. die Diskussion lokal linearer Trends bei Findley (1983) in seinem Kommentar zu Harvey/Todd (1983).

<sup>7</sup> Die Annahme der Unkorreliertheit ist umstritten und deshalb eingeführt worden, weil das Gleichungssystem sonst formal nicht lösbar ist.

<sup>8</sup> Die Trendkomponente ist also ein zweifach integrierter Prozeß, der von zwei unabhängigen Schockreihen beeinflusst wird. Solche Trends werden von Garcia-Ferrer/del Hoyo (1992) und Young (1992) diskutiert, die auf weitere Literatur verweisen.

## Lineare Filter

Diesen modellbasierten Ansätzen stehen alle jene Verfahren gegenüber, die den Trend als stetige bzw. glatte Entwicklung einer Reihe auffassen, die frei von zufälligen und regelmäßig wiederkehrenden, also zyklischen Schwankungen ist. Nach dieser Vorstellung repräsentiert der Trend die langfristige Veränderung im Niveau einer Reihe.<sup>9</sup> Die Darstellung eines glatten Trends macht es erforderlich, die Reihe sowohl von kurzfristigen, zufälligen als auch von regelmäßig wiederkehrenden Schwankungen - den Konjunkturzyklen - zu befreien, um so den »störungsfreien« und langfristigen Reihenverlauf sichtbar zu machen.

In der Statistik sind eine Vielzahl von Verfahren entwickelt worden, mit denen man die Reihe entweder glätten kann und damit den Trend erhält, oder die den Trend eliminieren, so daß eine trendfreie Reihe resultiert, die dann gegebenenfalls Gegenstand der Konjunkturanalyse ist. Dabei kommt der Anpassung deterministischer Funktionen der Zeit, gleitenden Mittelwerten und anderen Glättungsverfahren, wie z.B. dem »exponential smoothing« die wohl größte Bedeutung zu. In der historischen Konjunktur- und Wachstumsforschung, im Bereich der amtlichen Statistik und in der Praxis der Wirtschaftsforschungsinstitute dominiert diese Art der Trenddarstellung. Alle diese Verfahren kann man als Filter auffassen, da sie bestimmte Schwingungen (Frequenzen) in die Outputreihe übertragen, andere dagegen nicht: sie verändern also den Frequenzgehalt einer Reihe.

Faßt man eine Zeitreihe als Summe vieler sich überlagernder Schwingungen unterschiedlicher Form und Dauer (Amplitude und Periode) auf, so kann man sagen, daß ein solcher Trend die niederfrequenten Schwingungen der Reihe repräsentiert, während es sich bei zufälligen und konjunkturellen Veränderungen um hochfrequente Schwingungen handelt.<sup>10</sup> Da diese Trendvorstellung langfristige Schwingungsvorgänge und damit einen relativ glatten und stetigen Verlauf des Trends impliziert kommen für seine Darstellung nur Schwingungen mit niedriger Frequenz in Frage. Zur Trenddarstellung benötigt man daher einen Filter, der nur niederfrequente Schwingungen in die Outputreihe überträgt. Solche Filter werden als Tiefpaß-Filter und im folgenden als Trendfilter bezeichnet

Generell versteht man unter einem Filter einen Algorithmus zur Transformation einer Zeitreihe.<sup>11</sup> Die zu filternde Zeitreihe  $\{Y_t\}$  wird als Inputreihe, das Er-

---

<sup>9</sup> Vgl. z.B. Garcia-Ferrer/del Hoyo (1992, S. 645): »Trend can be generally described as the 'long-term change in the mean level per unit of time'.«

<sup>10</sup> Hierzu Maravall (1993, S. 5): »The trend is associated with the underlying smooth evolution of a series free from transitory or cyclical [...] effects. In the frequency domain this long-term evolution is associated with the low frequencies of the spectrum.«

<sup>11</sup> Vgl. auch Metz/Stier (1991).

gebnis des Filters  $\{Z_t\}$  als Outputreihe bezeichnet, so daß sich der Zusammenhang zwischen Filter-Input und Filter-Output folgendermaßen darstellen läßt:

$$Z_t = F(Y_t) \quad [8]$$

Durch den Filter werden bestimmte Schwingungen (Frequenzen) in die Outputreihe übertragen, andere dagegen nicht, er verändert also den Frequenzgehalt einer Reihe. Schwingung und Frequenz sind äquivalente Bezeichnungen. Im allgemeinen bezeichnet die Frequenz den Kehrwert der Schwingungsdauer. So entspricht einer Schwingung mit 60jähriger Dauer die Frequenz  $1/60 = 0.01667$ . Das bedeutet, daß eine 60jährige Schwingung in einer Zeiteinheit ein Sechzigstel ihrer Dauer zurücklegt. Je kleiner (größer) die Frequenz, desto länger (kürzer) ist die Schwingungsdauer. Einer Schwingung mit unendlicher Dauer entspricht eine Frequenz von Null. Die kürzeste meßbare Schwingungsdauer bei diskreten Daten beträgt zwei Zeiteinheiten (ZE) und entspricht einer Frequenz von 0.5. Je mehr Schwingungen kurzer Dauer eine Reihe bestimmen, desto unruhiger, volatiliter ist ihr Verlauf. Dominieren dagegen Schwingungen mit längerer Dauer, wird die Reihe glatter verlaufen. Zur Trenddarstellung (-bereinigung) benötigt man daher einen Filter, der nur niederfrequente (hochfrequente) Schwingungen in die Outputreihe überträgt.

Sofern es sich bei dem Filter um ein lineares zeitinvariantes System handelt,<sup>12</sup> läßt sich an der sogenannten Transferfunktion des Filters («Frequency Response Function») studieren, wie der Frequenzgehalt der Inputreihe verändert wird. Die Transferfunktion ist im allgemeinen komplexwertig und kann geschrieben werden als:

$$T(f) = |T(f)| e^{i\Phi(f)} \quad , \quad 0 \leq f \leq 0.5 \quad [9]$$

Dabei wird  $|T(f)|$ , der Absolutbetrag von  $T(f)$ , üblicherweise als Amplitudenfunktion bezeichnet (im folgenden kurz  $A(f)$  genannt), während  $\Phi(f)$  die Phasenfunktion des Filters darstellt.<sup>13</sup> Die Phasenfunktion gibt für jede Frequenz an, um wieviele Zeiteinheiten sie gegebenenfalls im Filter-Output verzögert dargestellt ist. Dabei kann das Ausmaß der zeitlichen Verzögerung durchaus frequenzabhängig sein, so daß z.B. langfristige Schwingungen stärker verzögert werden als kurzfristige.

An der Amplitudenfunktion, genauer an ihrem Wert, lassen sich die Ausblendeigenschaften eines Filters studieren. Frequenzkomponenten, für die  $A(f)$  kleiner (größer) als Eins ist werden durch den Filter abgeschwächt (verstärkt). Ein Funktionswert von 1 bedeutet daß die entsprechende Frequenz der In-

<sup>12</sup> Allgemein kann man für ein lineares System schreiben  $X_t = \sum_{k=-\infty, \dots, \infty} h_k Y_{t-k}$ ,  $t = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ; vgl. Stier (1993). Eine knappe Einführung in das Problem geben auch King/Rebello (1993) bei ihrer Diskussion des Hodrick-Prescott Filters.

<sup>13</sup>  $O(f)$  mißt die Phase in radian, weshalb sich eine Umrechnung in Zeiteinheiten empfiehlt, die sich aus einer Division von  $\Phi(f)$  durch  $f \in [0, 0.5]$  ergibt.



putreihe unverändert in die Outputreihe übertragen wird. Ist der Wert dagegen Null, wird die entsprechende Frequenz durch den Filter eliminiert. Der Wert der Amplitudenfunktion gibt also den Faktor an, mit dem Frequenzen bei der Übertragung von der Inputreihe in die Outputreihe multipliziert werden.

Je nachdem, welche Frequenzen durch den Filter übertragen werden, spricht man z.B. von einem Hochpaß- oder Tiefpaß-Filter. Ein Hochpaß überträgt nur hochfrequente und ein Tiefpaß nur niederfrequente Schwingungen. Praktisch bedeutsam sind 4 Filtertypen: Hochpaß-, Tiefpaß-, Bandpaß- und Bandstopp-Filter. Abbildung 1 zeigt die »ideale« Amplitudenfunktion eines Tiefpaß-Filters.

Durch diesen Filter werden alle Schwingungen mit einer Frequenz von  $f \in [0, f_x]$  unverändert in den Filter-Output übertragen und alle Schwingungen mit einer Frequenz von  $f \in [f_x, 0.5]$  eliminiert.  $f_x$  wird dabei als »Abschneidfrequenz« und von uns im folgenden als »Trendfrequenz« bezeichnet. Für den in Abb. 1 dargestellten Tiefpaß-Filter beträgt  $f_x = 0.125$ . Frequenzbereiche, die durch den Filter übertragen (eliminiert) werden, heißen Paßbänder (Stoppbänder).<sup>1)</sup> Ein Tiefpaß-Filter hat demnach das Paßband  $f \in [0, f_x]$  und das Stoppband  $f \in [f_x, 0.5]$ . Der Filter, dessen Amplitudenfunktion in Abb. 1 dargestellt ist, wurde von uns deshalb als »idealer« Filter bezeichnet, da seine Amplitude im Paßband exakt den Wert Eins und im Stoppband exakt den Wert Null aufweist

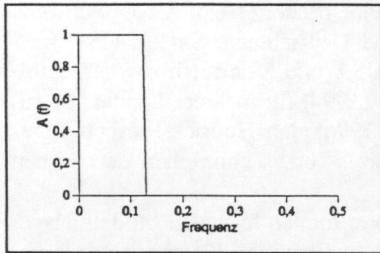


Abb. 1: Amplitudenfunktion eines Tiefpaß-Filters

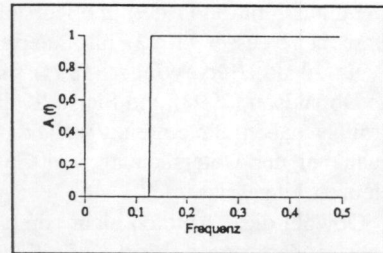


Abb. 2: Amplitudenfunktion eines Hochpaß-Filters

Im Unterschied zum Tiefpaß-Filter eliminiert der Hochpaß-Filter alle niederfrequenten Schwingungen und überträgt nur die hochfrequenten Schwingungen in den Filter-Output. Abb. 2 zeigt die Amplitudenfunktion eines »idealen« Hochpaß-Filters. Dieser Hochpaß-Filter hat das Paßband  $f \in [f_x, 0.5]$  und das Stoppband  $f \in [0, f_x]$ . Als Abschneidfrequenz wurde wieder  $f_x = 0.125$

<sup>1)</sup> Im folgenden werden Beginn und Ende der Paß- und Stoppbänder in Frequenzeinheiten angegeben.

festgelegt. Offensichtlich sind die Amplitudenfunktionen von Tief- und Hochpaß-Filtern zueinander komplementär. Es ist

$$A_{HP}(f) = 1 - A_{TP}(f) \quad [10]$$

Es ist evident, daß man zur Trenddarstellung einen Tiefpaß-Filter und zur Trendbereinigung einen Hochpaß-Filter benötigt.

## Der Hodrick-Prescott Filter

### Allgemeines

Vor allem in der empirischen Konjunkturforschung hat sich in den letzten Jahren ein Filter etabliert, der auf eine unveröffentlichte Arbeit von Hodrick/Prescott (1980) zurückgeht, und deshalb als Hodrick-Prescott Filter (kurz HP-Filter) bezeichnet wird.<sup>15</sup> Gegenwärtig liegen zahlreiche Untersuchungen vor, die mit diesem Filter vor allem die »stylized facts« der Konjunktorentwicklung darzustellen versuchen.<sup>16</sup> Entsprechende Arbeiten zu Konjunktur- und Preiszyklen in historischer Perspektive haben Cooley/Ohanian (1991) für die USA von 1822-1987, Backus/Kehoe (1992) für mehrere Länder von 1850-1986, Correia et al. (1992) für das Vereinigte Königreich und die USA von 1850-1950 und Englund et al. (1992) für Schweden von 1861-1988 vorgelegt. Den Konjunkturverlauf nach dem II. Weltkrieg untersuchen Prescott (1986) für die USA, Danthine/Girardin (1989) und Kürsteiner/Rindisbacher (1994) für die Schweiz, Brandner/Neusser (1992) für Österreich und Deutschland, Smeets (1992) für Deutschland, Harvey/Jäger (1991) für die USA und Österreich sowie Danthine/Donaldson (1993) und Fiorito/Kollintzas (1994) für mehrere Länder.<sup>17</sup> Neuerdings haben Bauernfeind/AVbitek (1994, 1996) den Hodrick-Prescott Filter auch bei der Untersuchung von Getreidepreis- und Zehntreihen der Frühen Neuzeit eingesetzt.

Obwohl diese Autoren nicht von einem bestimmten formalen Modell ausgehen, sondern von a priori Definitionen der zu filternden Komponenten,<sup>18</sup> un-

---

<sup>15</sup> Walter Bauernfeind und Ulrich Woitek, Universität München, Seminar für Wirtschaftsgeschichte, danke ich für die Zusendung des bislang unveröffentlichten »Working-Papers« von Hodrick und Prescott.

<sup>16</sup> Englund et al. (1992, S. 343): »Recent empirical studies of business cycles have focused on establishing robust stylized facts. Such stylized facts are typically based on detrended time series for major economic aggregates, [...]«; vgl. auch Tichy (1994).

<sup>17</sup> Vgl. auch die Untersuchung von Torres/Martin (1990) zum Potentialwachstum und Hoeller/Poret (1991) zu Preiszyklen.

<sup>18</sup> Exemplarisch in diesem Sinne die Argumentation von Englund et al. (1992, S. 355): »[...] to study business cycle fluctuations, it is necessary take an a priori stand on exactly what one means by business cycles.« Oder an anderer Stelle: »We adopt a traditional a priori definition of business cycles, namely cyclical comovements bet-

terstellen sie grundsätzlich, und das ist das eigentlich Bemerkenswerte, einen stochastischen Trend. Offensichtlich setzen sie voraus, daß der »modellfreie« HP-Filter zur Ausschaltung bzw. zur Darstellung stochastischer Trends ebenso geeignet ist, wie die modellbasierten Verfahren nach Beveridge und Nelson oder Harvey. Die Rechtfertigung für dieses Vorgehen läßt sich aus den in der Literatur genannten Behauptungen über die Eigenschaften des HP-Filters ableiten, von denen die wichtigsten im folgenden genannt seien:

1. Der Filteransatz zeichne sich durch einfache Handhabung aus, was vor allem gegenüber der relativ aufwendigen ARIMA-Modellierung als Vorzug gesehen" wird, und zudem sei er anderen Filtern überlegen.<sup>20</sup>
2. Der Filter ließe sich auf jede Zeitreihe und für jeden Zeitraum »mechanisch« und vor allem »theoriefrei« anwenden.<sup>21</sup> Besonders die »Theoriefreiheit« wird als Vorzug gesehen, weil die Entscheidung für eine bestimmte Theorie immer mit großen Unsicherheiten verbunden sei und damit die empirischen Ergebnisse von unsicheren theoretischen Vorentscheidungen beeinflusst würden.<sup>22</sup> Gegen die Vorgabe eines bestimmten theoretischen Modells spräche auch die Tatsa-

---

*ween important macroeconomic variables with periods of around five years« (S. 344).*

<sup>19</sup> In diesem Sinne Smeets (1992, S. 514): »Last but not least ist an den hohen zeitlichen Aufwand einer solchen individuellen ARIMA-Schätzung bei einer umfassenden Untersuchung zu denken«.

<sup>20</sup> Brandner/Neusser (1992, S. 68f.): »[The HP-filter] has several attractive features. First, it can be implemented mechanically without the need for judgemental interventions. [...] the HP-filter is simple to use and 'superior' to other filters, like for example first differences.« In diesem Sinne auch Danthine/Donaldson (1993, S. 5): »The merits of these filter are numerous: It is simple to use and highly operational [...]« Dagegen läßt sich einwenden, daß eine »leichte Handhabung« kein sachliches Argument darstellt um die Angemessenheit verschiedener Verfahren zu beurteilen. Nicht unerwähnt soll bleiben, daß Brandner/Neusser (1992, S. 68) ausdrücklich als Nachteil des HP-Filters die Tatsache anführen, daß er nur für eine bestimmte Klasse von Modellen einen »optimalen« Filter darstellt; vgl. unten.

<sup>21</sup> Brandner/Neusser (1992, S. 68): »We think that it is still a meaningful exercise to provide basic statistical properties of economic time series without pretending to have too much a priori economic theory.« Unkritisch in dieser Hinsicht auch Smeets (1992 S. 514): »Der von Hodrick und Prescott vorgeschlagene Filter hat den Vorteil, daß er sich einheitlich auf alle Zeitreihen sowie alle Zeiträume anwenden läßt und zwar ‚mechanisch‘ ohne ein wertendes Urteil des jeweiligen Anwendenden. Er zeichnet sich somit durch eine hohe Vergleichbarkeit in jeder Hinsicht aus. Hierdurch erscheint diese Methode zur Trendberechnung zum Beispiel einer ARIMA-Schätzung jeder individuellen Zeitreihe überlegen«.

<sup>22</sup> In diesem Zusammenhang stellen King/Rebelo (1993) fest, daß die Literatur zur Anwendung des HP-Filters den Eindruck vermittelt, als ob der Filter »has relatively minor consequences for how one thinks about economic models and their consistency with observed time series« (S. 208). Sie zeigen jedoch, daß gerade das Gegenteil der Fall ist: »[...] the practice of 'low frequency filtering' has major consequences for [...] the stylized facts of business cycles [...]« (ebda.).

che, daß mit den gegenwärtigen Testverfahren nicht sicher zwischen einem stochastischen und einem deterministischen Trend unterschieden werden könne.<sup>23</sup>

3. Ein weiteres Argument ist die den Filterergebnissen unterstellte Robustheit<sup>24</sup> gegenüber Modellannahmen, Zeitreihen, Zeiträumen und datenerzeugenden Prozessen. Auf diese Eigenschaft wird vor allem bei umfangreichen internationalen und intertemporalen Vergleichen Wert gelegt

4. Zudem würden die mit dem Filter gewonnenen Ergebnisse viel eher den tradierten Vorstellungen von Konjunktur und Wachstum entsprechen, als die Ergebnisse anderer Verfahren.<sup>25</sup>

5. Mit dem HP-Hochpaß Filter könnten nichtstationäre Prozesse, die bis zum Grad vier integriert sind, optimal in stationäre Prozesse transformiert, also trendbereinigt werden.<sup>26</sup>

#### Zur Konstruktion des HP-Filters<sup>27</sup>

Geht man von dem Komponentenmodell

$$Y_t = T_t + C_t$$

aus, bei dem  $T_t$  die Trendkomponente und  $C_t$  die Konjunkturkomponente darstellt,<sup>28</sup> so erfordert die rechnerische Bestimmung der Komponenten die Ein-

---

<sup>23</sup> Englund et al. (1992 S. 349): »Given that we do not have a particular theoretical model in mind, and given the weak power of most tests for stochastic versus deterministic trends, we prefer to take an agnostic view towards detrending.« Gemeint sind hier vor allem die Einheitswurzel- oder »Unit Root«-Tests.

<sup>24</sup> In diesem Sinne Hillinger et al. (1992, S. If.), die hierfür gleich mehrere Argumente anführen.

<sup>25</sup> King/Rebelo (1993, S. 210): »[...] our discussion [...] involves the issue of how best to define business cycles. One possibility [...] would be to select some mechanical method that broadly replicated the stylized facts reported by NBER researchers [...].« Danthine/Donaldson (1993, S. 5): »The merits of these filter are numerous: [...] the definition of trend it provides is intuitive [...] Being statistical in nature, it represents a particular way of viewing the data which can be very productive if accepted and used by most researchers.« Brandner/Neusser (1992, S. 68): »[...] the filtered series come close to what economists have described as business cycle movements.«

<sup>26</sup> Brandner/Neusser (1992, S. 68): »[...] it extract stochastic trends with an order of integration up to order four. It can therefore accomodate time series with changing mean growth rates, like productivity which started to grow at lower rates around 1970.« Geradezu euphorisch Danthine/Donaldson (1993, S. 5): »[...] it is able to render stationary, series that are integrated up to the fourth order [...] and no dominating alternative procedure has yet been proposed.«

<sup>27</sup> Vgl. zum folgenden vor allem Brandner/Neusser (1992) und King/Rebelo (1993).

<sup>28</sup> Man beachte, daß in diesem Modell nur zwei Komponenten unterschieden werden, so daß die in anderen Modellen genannte Zufallskomponente unter der Konjunkturkomponente subsumiert wird.

führung bestimmter Restriktionen. Einem Vorschlag folgend, der auf Whittaker (1923) zurückgeht, schlagen Hodrick/Prescott (1980) vor,  $Y_t$  durch eine glatte Kurve zu approximieren und diese als Trendkomponente zu definieren. Die »Glattheit« des Trends wird dabei so festgelegt, daß die Quadratsumme der zweiten Differenzen der Trendkomponente kleiner gleich einer vorgegebenen Zahl ist. Diese Vorgabe läßt sich als Minimierungsproblem unter einer Nebenbedingung wie folgt darstellen:<sup>29</sup>

$$\sum_{t=1}^T (Y_t - T_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(T_{t+1} - T_t) - (T_t - T_{t-1})]^2 \rightarrow \min_{(T_t)} \quad (11)$$

Im ersten Teil des Ausdrucks werden die quadrierten Abweichungen der Reihe vom Trend summiert. Diese Summe ist für  $Y_t = T_t$  gleich Null. Je glatter der Trend ist, desto größer wird dieser Term. Der zweite Teil ist eine gewichtete Summe der zweiten Differenzen der Trendkomponente - der Gewichtungsfaktor ist  $\lambda$  - und damit ein Maß für die Glattheit des Trends. Dieser zweite Term ist gleich Null, wenn die Veränderung der glatten Komponente konstant, d.h. wenn  $T_t$  linear ist. Damit entsteht ein »trade off« zwischen dem Fit und der Glattheit. Welches Gewicht den einzelnen Restriktionen zukommt, wird durch den a priori festzulegenden Gewichtungsfaktor  $\lambda$  bestimmt. Mit größer werdendem  $\lambda$  wird der Trend immer glatter und schließlich, bei  $\lambda = \infty$  linear. Bei  $\lambda = 0$  ist der Trend mit der Originalreihe identisch.

Für die Lösung dieses Minimierungsproblems unter einer Nebenbedingung gibt es zwei Möglichkeiten.<sup>30</sup> Eine davon basiert auf der Tatsache, daß sich das Minimierungsproblem auch als Filter darstellen läßt. Hierzu schreiben Brandner/Neusser (1992, S. 71): »It is possible to adapt the classical **Signal** extraction formula for stationary time series (Whittle 1983) to the non-stationary case (Bell 1984). The optimal estimate of  $C_t$ , given the entire doubly **infinite** realization of  $\{Y_t\}$  is given by:

$$E(C_t | Y_t, Y_{t\pm 1}, Y_{t\pm 2}, \dots) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Gamma_i Y_{t-i} = \Gamma(B)Y_t$$

mit

(12)

$$\Gamma(B) = \frac{[(1-B)^2 (1-B^{-1})^2]}{[(1-B)^2 (1-B^{-1})^2 + q_c]}$$

<sup>29</sup> Vgl. auch Hillinger et al. (1992, S. 7) und King/Rebello (1993, S. 217). Brandner/Neusser (1992, S. 70) weisen darauf hin, daß Hodrick und Prescott dabei einem Vorschlag von Whittaker (1923) zur Approximation einer glatten Kurve folgen. Vgl. zu diesem Ansatz im Rahmen der Saisonbereinigung Schips/Stier (1993) und Pauly (1995).

<sup>30</sup> Vgl. auch Danthine/Girardin (1989, S. 36).

Daraus ergibt sich direkt der optimale Schätzer für die trendfreie Komponente als:

$$C_t = \left[ \frac{(1-B)^2 (1-B^{-1})^2}{q_\zeta + (1-B^2) (1-B^{-1})^2} \right] Y_t, \quad q_\zeta > 0, \quad (13)$$

wobei  $q_\zeta = \sigma_T^2 / \sigma_C^2$  das Verhältnis der Varianz der Trendkomponente zur Varianz der trendfreien Komponente und B den Backshift-Operator bezeichnen.<sup>31</sup> Die exakte Lösung ergibt sich über einen Kalman-»Glätter«<sup>32</sup> aus der Zustandsraumdarstellung des Filters.<sup>33</sup> Für die Trendkomponente gilt

$$T_t = Y_t - C_t$$

Diesem Ansatz folgen Brandner/Neusser (1992); Harvey/Jäger (1991) und King/Rebelo (1993).

Da  $q_\zeta$  dem Kehrwert von  $\lambda$  entspricht wird mit diesem nicht nur die »Glattheit« des Trends, sondern auch gleichzeitig das Varianzverhältnis der beiden Komponenten, also  $\sigma_C^2 / \sigma_T^2$  festgelegt. Da dieses Varianzverhältnis prinzipiell unbekannt ist, stellt sich die Frage, nach welchen Kriterien  $\lambda$  festgelegt werden kann. Die meisten Anwender folgen Hodrick und Prescott, wonach »a five percent cyclical component is moderately large as is a one-eighth of one percent change of the rate of growth in a quarter.«<sup>34</sup> Daraus ergibt sich für Quartalsreihen  $\lambda = (5 / (1/8))^2 = 1600$ ,<sup>35</sup> dem  $q_\zeta = 0.000625$ <sup>36</sup> entspricht Häufig wird für

<sup>31</sup> Vgl. dazu auch King/Rebelo (1993, S. 217ff.) die den HP-Filter mit dem »Exponential Smoothing« vergleichen. Aus der Tatsache, daß im Zähler des Bruches 4. Differenzen vorkommen, resultiert die Feststellung: »[...] the HP cyclical filter is also capable of rendering stationary any integrated process up to forth order [...]«; vgl. King/Rebelo (1993, S. 220).

<sup>32</sup> Einen Algorithmus dazu liefert Koopman (1992); vgl. Harvey/Jäger (1991, S. 4). Unseren Berechnungen liegt ein von Prescott geschriebenes FORTRAN-Programm zugrunde, das uns freundlicherweise von D. Backus (New York) zur Verfügung gestellt wurde.

<sup>33</sup> King/Rebelo (1993) stellen den HP-Hochpaßfilter auch als symmetrischen »Moving Average« Filter dar, der eine Art doppeltes »Exponential Smoothing« enthält. Ihre Abb. 5 zeigt den Verlauf der Filtergewichte von -40 bis +40 für den HP-Hochpaßfilter und  $\lambda = 1600$ .

<sup>34</sup> Zitiert nach Brandner/Neusser (1992, S. 71).

<sup>35</sup> Vgl. auch Danthine/Girardin (1989 S. 37).

<sup>36</sup> Zur Darstellung der HP-Trendkomponente für  $\lambda = 1600$  kann auch das Programm STAMP verwendet werden, indem man  $\sigma_\eta^2 = 0$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 = 0$  und  $\sigma_\zeta^2 = q_\zeta$  a priori festlegt; freundlicher Hinweis von S. Koopman. STAMP steht für »Structural Time Series Analyser, Modeller and Predictor«.

die Filterung von Jahresreihen  $\lambda = 400$  oder  $\lambda = 100$  festgelegt, was ein Varianzverhältnis der beiden Komponenten von 400:1 bzw. 100:1 impliziert.<sup>37</sup> Die Tatsache, daß über ein *hypothetisch* angenommenes Varianzverhältnis der trendfreien Komponente zur Trendkomponente die Glättungseigenschaft des Filters bestimmt wird, ist von Harvey/Jäger (1991) kritisiert worden. Sie betonen, daß dieses Varianzverhältnis nicht vorgegeben, sondern aus der vorliegenden Zeitreihe geschätzt werden sollte.

Prinzipiell unabhängig von diesen Überlegungen zum Varianzverhältnis der Komponenten kann man  $\lambda$  auch so festlegen, daß der Filter eine vorgegebene Amplitudenfunktion approximiert. Nach King/Rebelo (1993, S. 221) läßt sich diese für den HP-Hochpaß-Filter wie folgt schreiben:

$$A(f) = \frac{4\lambda[1 - \cos(f)]^2}{1 + 4\lambda[1 - \cos(f)]^2} \quad (14)$$

Abbildung 3 zeigt die Amplitudenfunktion des HP-Hochpaß-Filters für  $\lambda = 100, 400$  und  $1600$ . Ob der HP-Hochpaß-Filter mit  $\lambda = 1600$  alle Schwingungen mit einer Dauer von mehr als 32 Zeiteinheiten (bei Quartalsreihen 32 Quartale oder 8 Jahre) eliminiert, also der Trendkomponente zuweist, wie es Brandner/Neusser (1992) behaupten,<sup>38</sup> läßt sich anhand seiner Amplitudenfunktion nicht genau beantworten.<sup>39</sup> Komplementär zur Amplitudenfunktion des HP-Hochpaß-Filters verläuft die des Tiefpasses bei größer werdendem  $\lambda$  immer steiler und enger zur Y-Achse. D.h. mit größer werdendem  $\lambda$  wird der Trend immer glatter und ist schließlich bei  $\lambda = \infty$  eine Gerade. Der Wert dieses Parameters entscheidet darüber, welche Frequenzkomponenten den Trend und welche den Zyklus konstituieren. Die Festlegung von  $\lambda$  wird deshalb auch als »Achilles-Sehne« des HP-Filters bezeichnet!<sup>40</sup>

Eingangs wurde als bedeutender Vorzug des HP-Filters die Behauptung erwähnt, daß seine Anwendung kein bestimmtes Modell voraussetzen würde.<sup>41</sup>

<sup>37</sup> Correia et al. (1992, S. 460): »[...] choosing a smoothing parameter of  $\lambda = 400$  (the features that we emphasize also hold for  $\lambda = 100$ , which is another standard smoothing parameter for annual data)«. Hillinger et al. (1992, S. 7): »For annual data, a plausible value of  $\lambda$  is 100, conforming to a model where the variance of the fluctuation is 100 times the variance of the trend. Alternatively,  $\lambda = 10$  is also tried.« Englund et al. (1992) verwenden den HP-Filter mit  $\lambda = 400$  für Quartalsdaten.

<sup>38</sup> Brandner/Neusser (1992, S. 71): »With quarterly time series, the filter with  $\lambda = 1600$  removes all cycles longer than 32 quarters leaving shorter cycles unchanged.«

<sup>39</sup> Entsprechend würden bei Jahresreihen für  $\lambda = 400$  alle Schwingungen, deren Dauer länger als 8 Jahre ist, eliminiert; vgl. Hillinger et al. (1992, S. 8).

<sup>40</sup> Danthine/Girardin (1989, S. 37): »Arbitrariness in the choice of  $\lambda$  is the Achilles' heel of this method.«

<sup>41</sup> Exemplarisch hierfür der Aufsatztitel von Hillinger et al. (1992): »Model-Independent Detrending for Determining the Cyclical Properties of Macroeconomic Time Series.«



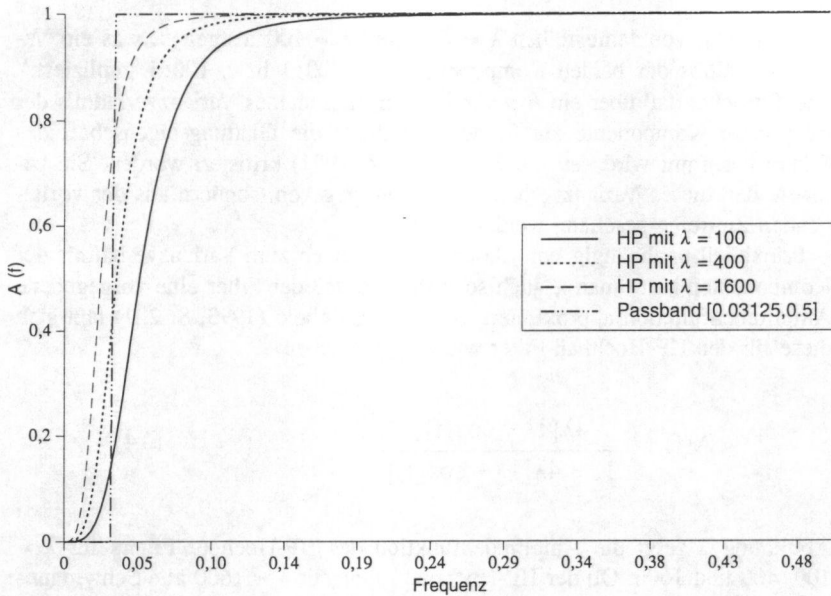


Abb. 3: Amplitudenfunktionen

Dieser These haben bereits Nelson/Plosser (1982)<sup>42</sup> und neuerdings auch Harvey/Jäger (1991), King/Rebelo (1993) und Jäger (1994)<sup>43</sup> widersprochen. King/Rebelo zeigen, daß der Filter nur dann optimal im Sinne der Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers im Sinne von Wiener (1949) und Whittle (1963) sein kann, wenn die zu filternde Zeitreihe einem Komponentenmodell mit einer Trend- und Konjunkturkomponente<sup>44</sup> entspricht, die voneinander unabhängig sind. Als weitere Restriktion wird für die Trendkomponente ein in-

<sup>42</sup> »The Hodrick and Prescott strategy implicitly imposes a components model on the data without investigating what restrictions are implied (a difficult task in their model) and whether those restrictions are consistent with the data. Our strategy on the other hand, is to use the data as an aid in identifying certain characteristics of an appropriate components model. Our results suggest that the ratio of the standard deviations of growth to cyclical innovations has a minimum in the neighborhood of one with likely values up to six rather than the value of 1/40th assumed by Hodrick and Prescott« (S. 158).

<sup>43</sup> Auch Brandner/Neusser (1992) betonen, daß der HP-Filter nur für eine bestimmte Klasse von Modellen optimal ist. Fiorito/Kollintzas (1994, S. 239) nennen weitere kritische Arbeiten, die jedoch nur als Working-Paper vorliegen und uns nicht zugänglich waren.

<sup>44</sup> Hierzu King/Rebelo (1993, S. 223): »To maximize the chances of the HP filter being an optimal linear filter, we chose a time series representation [...] in which innovations to the growth and cycle components are orthogonal, so that growth and business cycles are separate phenomena.«



tegrierter Random Walk, also ein I(2)-Prozeß<sup>45</sup> vorausgesetzt. Man kann ein solches Modell mit dem TZ-Modell des strukturellen Zeitreihenansatzes vergleichen, bei dem das Verhältnis der Varianz der Wachstumsrate zu der der irregulären Komponente a priori vorgegeben ist, und bei dem die Varianz des Levels und des Zyklus gleich Null sind.<sup>46</sup> Die Anwendung des HP-Filters ist also keineswegs modellfrei, sondern setzt einen bestimmten Typ eines datenerzeugenden Prozesses und - für ein vorgegebenes  $\lambda$  - ein bestimmtes Varianzverhältnis der beiden Komponenten voraus.

### Beispiele simulierter Reihen

Im folgenden soll auf einige Anwendungsprobleme des HP-Filters, besonders in Zusammenhang mit der Festlegung von  $\lambda$  hingewiesen werden.<sup>47</sup> Da der HP-Filter eine Komponentenstruktur der zu filternden Zeitreihe voraussetzt, verwenden wir zunächst simulierte Zeitreihen, die aus zwei Komponenten additiv zusammengesetzt sind:<sup>48</sup>

$$Y_t = T_t + C_t$$

wobei  $T_t$  wieder den Trend und  $C_t$  die stationäre Konjunkturkomponente bezeichnen. Der Trend wird einheitlich als integrierter Random Walk - also als I(2)-Prozeß - und die stationäre Komponente als stochastischer Zyklus mit einer Periode von 20 bzw. 50 ZE sowie als »White Noise«-Prozeß simuliert.<sup>49</sup>

Für die Filterung der drei simulierten Reihen muß zunächst der Wert von  $\lambda$  bestimmt werden. In den meisten Untersuchungen wird  $\lambda$  mit 1600, 400 oder 100 festgelegt und dies mit einem hypothetisch angenommenen Varianzverhältnis der Komponenten begründet. Diesem insgesamt problematischen Vorgehen können wir hier nicht folgen, da das Varianzverhältnis prinzipiell un-

<sup>45</sup> King/Rebelo (1993, S. 225): »If innovations to the growth and cyclical components are uncorrelated, we find that a necessary condition for the HP filtering procedure to be optimal is that the stochastic growth component have a random walk growth rate, i.e. that it be second-difference-stationary in an extension of the Nelson and Plosser terminology. However this condition is not sufficient. For the HP filter to be optimal, we must further require either that the cycle consist of uncorrelated events or that there be an identical dynamic mechanism that propagates changes in the growth rate and innovations to the business cycles components.«

<sup>46</sup> Vgl. Harvey/Jäger (1991, S. 4).

<sup>47</sup> Daß sich die Eigenschaften eines bestimmten Verfahrens im Hinblick auf stochastische Prozesse nicht anhand weniger simulierter Reihen untersuchen lassen, bedarf keiner besonderen Begründung. Wenn im folgenden trotzdem so gearbeitet wird, dann lediglich mit dem Anspruch, Probleme zu illustrieren und nicht sie zu lösen.

<sup>48</sup> Da unsere Zeitreihen die Struktur aufweisen, die der HP-Filter voraussetzt, können die Probleme, die sich aus einer Fehlspezifikation des Prozesses ergeben, zunächst unberücksichtigt bleiben.

<sup>49</sup> Alle Simulationen wurden mit dem PC-Programm »STAMP« (Version: Feb. 1990) durchgeführt.

bekannt ist, und es sich zudem zur Festlegung von  $\lambda$  nicht eignet, wenn es um die Analyse langfristiger Zyklen geht. Im folgenden soll der Wert von  $\lambda$  so festgelegt werden, daß der Filter eine bestimmte, a priori vorgegebene Amplitudenfunktion approximiert. Für die Untersuchung von Kuznets-Zyklen bedeutet dies z.B., daß der HP-Hochpaß-Filter alle Schwingungen mit der für diese Zyklen angegebenen Länge unverändert in den Filter-Output übertragen soll.

Da sich seine Amplitudenfunktion in Abhängigkeit von  $\lambda$  verändert, erfordert die Approximation einer bestimmten Amplitudenfunktion ein »Abtasten« verschiedener  $\lambda$ -Werte. In Abb. 3 (vgl. oben) ist die Amplitudenfunktion für  $\lambda = 1600$  und im Vergleich dazu eine »ideale« Amplitudenfunktion mit dem Stoppband  $[0, 0.03125]$  und dem Paßband  $[0.03125, 0.5]$  eingezeichnet. Aus den Ergebnissen für simulierte Reihen kann man schließen, daß die Abschneidefrequenz des HP-Filters für  $\lambda = 1600$  etwa bei  $1/32 = 0.03125$  liegt.<sup>50</sup> Ergänzend ist in Abb. 4 die Amplitudenfunktion des HP-Hochpaß-Filters für  $\lambda = 19200$  wieder im Vergleich zu einer idealen Amplitudenfunktion mit dem Stoppband  $[0, 0.01667]$  und dem Paßband  $[0.01667, 0.5]$  dargestellt. Auch hier läßt sich anhand der Ergebnisse für simulierte Reihen feststellen, daß die Abschneidefrequenz des HP-Hochpaß-Filters für  $\lambda = 19200$  etwa bei der Frequenz  $1/60 = 0.01667$  liegt. Theoretisch lassen sich daher mit dem HP-Hochpaß-Filter für  $\lambda = 1600$  Kuznets-Zyklen und für  $\lambda = 19200$  Kondratieff-Zyklen in den Filter-Output übertragen, so daß wir uns in den folgenden Beispielen auf diese zwei Werte beschränken.

Problematisch ist hierbei allerdings die Tatsache, daß die Amplitudenfunktion des HP-Filters in einem relativ breiten Übergangsbereich Werte zwischen Null und Eins annimmt, also keinen »idealen« Verlauf aufweist. Z.B. ist für  $\lambda = 19200$  der Wert der Amplitudenfunktion nur bei der Frequenz Null exakt Null und erst bei der Frequenz 0.169 exakt Eins. Die Konsequenzen eines solchen »unscharfen« Verlaufs für die gefilterten Komponenten sollen im folgenden veranschaulicht werden.

Betrachten wir zunächst die Reihe, bei der die stationäre Komponente eine Realisation eines »White Noise«-Prozesses und der Trend einen I(2)-Prozess darstellen. Der HP-Hochpaß reproduziert für diese Reihe sowohl mit  $\lambda = 1600$  als auch mit  $\lambda = 19200$  die »White Noise«-Reihe, was sich anhand der in Abb. 5 eingezeichneten Spektren der gefilterten Reihen (Spektrum II und III für  $\lambda = 19200$  bzw.  $\lambda = 1600$ ) im Vergleich zum Spektrum der simulierten Reihe (Spektrum I) demonstrieren läßt.<sup>51</sup> Wie die Abb. 5 zeigt, wird das Spektrum der

<sup>50</sup> Dies bestätigen Brandner/Neusser (1992), vgl. oben.

<sup>51</sup> Daß das geschätzte Spektrum der simulierten »White Noise«-Reihe Spitzen aufweist, ist darauf zurückzuführen, daß sich in endlichen Stichproben kein idealer White Noise realisieren läßt (sog. Pseudo-Zufall). Im folgenden werden die Filter danach beurteilt, inwieweit das Spektrum der Filter-Outputreihe das Spektrum der simulierten Reihe approximiert.

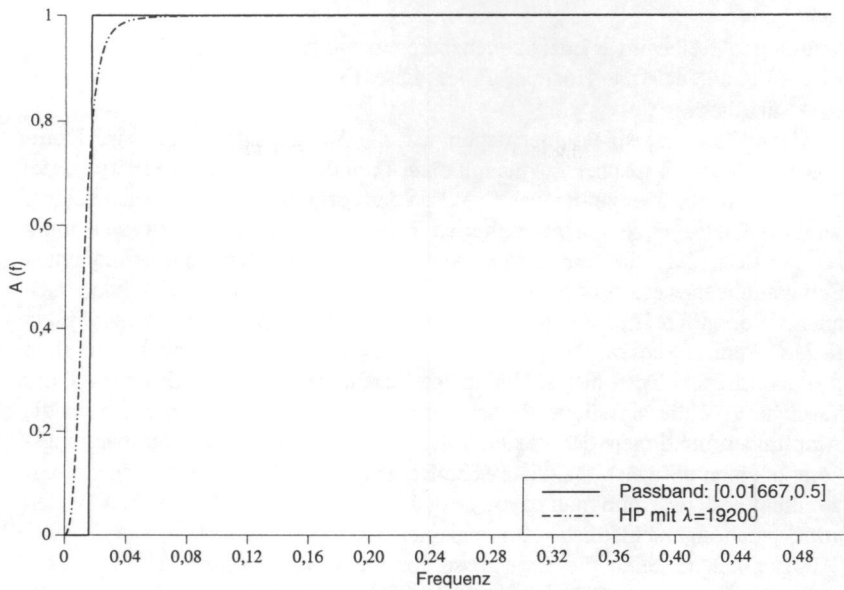


Abb. 4: Amplitudenfunktionen

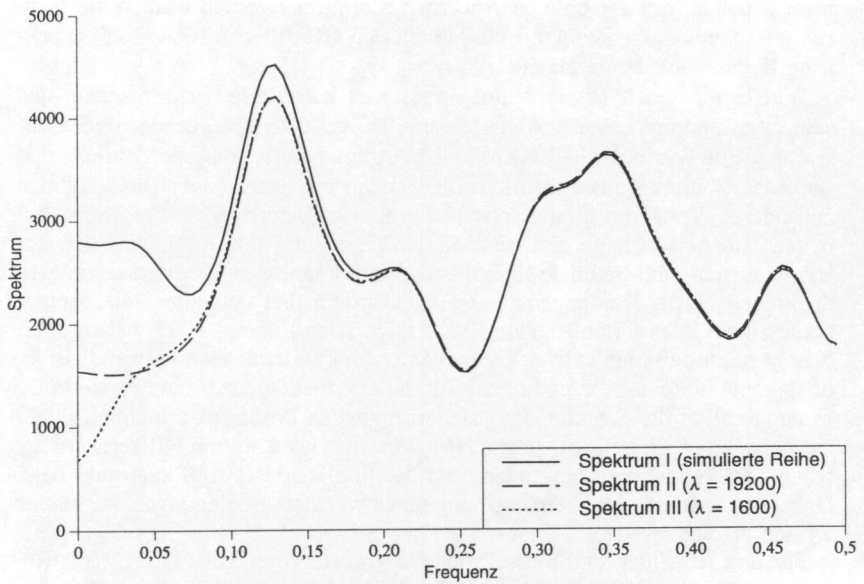


Abb. 5: Spektren unterschiedlich trendbereinigter Reihen

simulierten Reihe im Niederfrequenzbereich unterschätzt. Dies ist darauf zurückzuführen, daß die Hochpaß-Filter diese Frequenzen mehr oder weniger stark ausfiltern.

Als weiteres Beispiel untersuchen wir die Reihe, deren stationäre Komponente als stochastischer Zyklus mit einer Periode von 20 ZE simuliert wurde. Wie die in Abb. 6 eingetragenen Spektren der gefilterten Komponenten zeigen, wird die Peak-Frequenz der simulierten Reihe (Spektrum I) nahezu vollständig reproduziert. Die in der simulierten Reihe enthaltenen niederfrequenten Schwingungen werden durch den Filter weitgehend eliminiert, was theoretisch auch zu erwarten ist, da diese Schwingungen im Stoppbandbereich des Filters liegen. Wenn in diesem Beispiel die HP-Filter mit  $\lambda = 19200$  und  $\lambda = 1600$  zu fast identischen Ergebnissen führen, so beruht das im wesentlichen auf der Tatsache, daß die simulierte Reihe in dem Frequenzbereich, für den sich die Amplitudenfunktionen der beiden Filter unterscheiden, keine Schwingungskomponenten aufweist. Da historische Reihen in der Regel solche Eigenschaften nicht besitzen, muß man davon ausgehen, daß bei unterschiedlichen Werten von  $\lambda$  auch unterschiedliche Komponenten resultieren.

Abschließend seien die Ergebnisse für die Reihe dargestellt bei der die stationäre Komponente als stochastischer Zyklus mit einer Periode von 60 ZE simuliert wurde. Die Spektren der trendbereinigten Reihen in Abb. 7 zeigen, daß die niederfrequenten Schwingungen des simulierten Langfristzyklus (Spektrum I) nur teilweise reproduziert werden. Erwartungsgemäß werden die langfristigen Schwingungskomponenten durch den HP-Filter mit  $\lambda = 1600$  (Spektrum II) am stärksten reduziert.

Wie bereits erwähnt wird ein Vorzug des HP-Filters darin gesehen, daß seine Anwendung keine bestimmte Struktur des datenerzeugenden Prozesses voraussetzen würde. Er ließe sich, so die Argumentation, auf jede Zeitreihe und für jeden Zeitraum quasi theoriefrei anwenden und würde dabei im Vergleich zu anderen Verfahren relativ robuste Ergebnisse liefern. Mehrere neuere Arbeiten haben jedoch gezeigt daß diese Behauptung falsch ist und daß der HP-Filter nur dann optimale Ergebnisse liefern kann, wenn der datenerzeugende Prozeß einem Komponentenmodell entspricht bei dem die Trendkomponente einem integrierten Random Walk folgt King/Rebelo (1993) haben überdies gezeigt, daß eine solche Komponentenstruktur zwar eine notwendige, jedoch keine hinreichende Bedingung für die Optimalität des Filters darstellt. Da in der Realität die Struktur des datenerzeugenden Prozesses prinzipiell unbekannt ist ergibt sich die Frage nach den Auswirkungen auf die Filterergebnisse, wenn dem Filter-Input ein anderer als der implizierte Prozeß zugrunde liegt. Dabei interessiert vor allem, ob und unter welchen Bedingungen künstliche Zyklen erzeugt werden.

Für den HP-Filter sind diese Probleme von Harvey/Jäger (1991), King/Rebelo (1993), Jäger (1994) und anhand von Simulationsbeispielen von Hillinger et al. (1992)<sup>52</sup> untersucht worden. Im allgemeinen wird die Frage, ob ein Filter

<sup>52</sup> Hillinger et al. (1992) kommen in ihren Simulationsstudien, in denen sie sich aller-

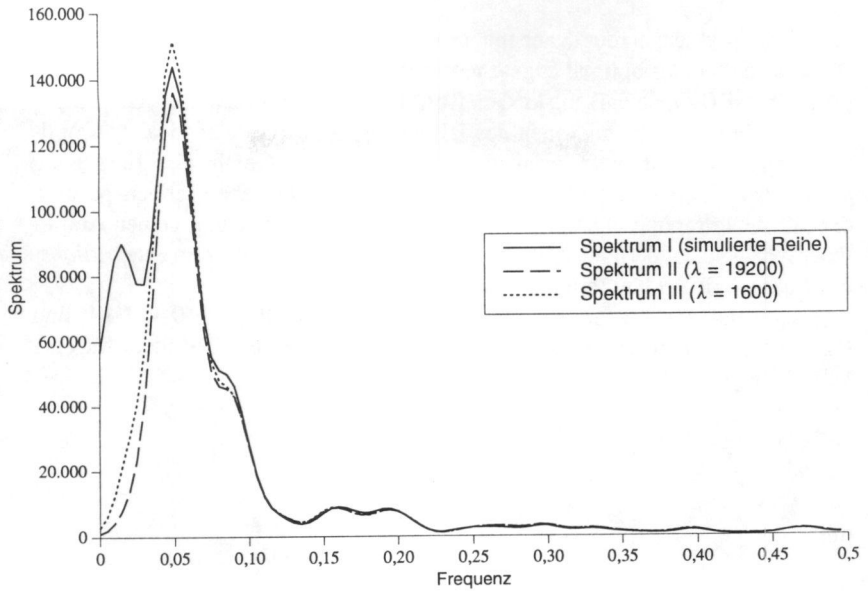


Abb. 6: Spektren unterschiedlich trendbereinigter Reihen

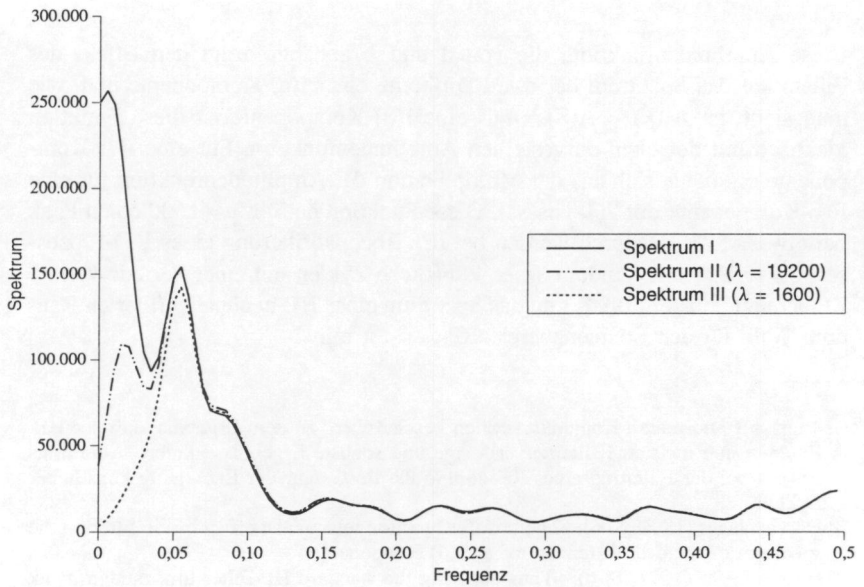


Abb. 7: Spektren unterschiedlich trendbereinigter Reihen

künstliche Zyklen erzeugt, anhand seiner Amplitudenfunktion beurteilt. Der Filter wird dann als optimal angesehen, wenn der Wert der Amplitudenfunktion im Paßband (Stoppband) exakt den Wert 1 (0) annimmt. Da die oben dargestellten Übertragungsfunktionen des HP-Hochpaß-Filters einer idealen Amplitudenfunktion recht nahe kommen, könnte man die Gefahr der Erzeugung künstlicher Zyklen ausschließen. Harvey/Jäger (1991) haben jedoch gezeigt, daß die Übertragungseigenschaft des HP-Filters nicht nur von seiner Amplitudenfunktion, sondern auch, und dies ist ganz entscheidend, vom *Integrationsgrad* der zu filternden Zeitreihe abhängt.

Ausgehend von einem strukturellen Zeitreihenmodell mit I(0)-, I(1)- und I(2)-Komponenten leiten sie die Amplitudenfunktion des HP-Filters für eine I(d)-Komponente ab:

$$A_d(\lambda) = 2^{(2-d)} (1 - \cos\lambda)^{2-d} A(\lambda), \quad d = 0, 1, 2 \quad (15)$$

mit

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{4[1 - \cos\lambda]^2}{[q_c + 4(1 - \cos\lambda)^2]^2} \quad (16)$$

Diese Amplitudenfunktion, die von  $d$  und  $\lambda$  abhängt, zeigt den Effekt des Filters auf das Spektrum der  $d$ -ten Differenz einer I(d)-Komponente und, wie man sieht, ist  $A_2(\lambda) = A(\lambda)$ .<sup>53</sup> Für eine I(0)-Komponente ist diese Funktion identisch mit der oben dargestellten Amplitudenfunktion. Für eine I(1)-Komponente ergibt sie sich aus der Multiplikation der Amplitudenfunktion für eine I(0)-Komponente mit  $2(1 - \cos(\lambda))$ . Diese Funktion hat für  $\lambda = 1600$  einen Peak bei etwa 30 ZE. Dadurch werden bei der Hochpaßfilterung eines I(1)-Prozesses, also z.B. eines Random Walk, künstliche Zyklen mit einer Periode von 30 ZE erzeugt.<sup>54</sup> Jäger (1994) gibt das Spektrum eines HP-hochpaßgefilterten Random Walk für den Frequenzbereich  $0 < \omega < \pi$  mit

---

**dings auf »normale« Konjunkturzyklen beschränken, zu dem Ergebnis, daß der HP-Filter in den meisten Fällen zuverlässige und robuste Ergebnisse liefert. Allerdings besteht bei der Filterung eines Random Walk die Gefahr der Erzeugung künstlicher Zyklen.**

<sup>53</sup> Harvey/Jäger (1991, S. 6): »The transfer function tells us the effect of the filter on the spectrum of the  $d$ -th difference of an I(d) component.«

<sup>54</sup> Harvey/Jäger (1991, S. 6): »Thus applying the standard HP-Filter to a random walk produces detrended observations which have the characteristics of a business cycle for quarterly observations [Periodizität von 30 ZE, R.M.]. Such cyclical behavior is spurious and is a classic example of the Yule-Slutsky effect.«



$$f_{C, HP}(\omega) = \frac{\sigma_e^2}{2\pi} \frac{8\lambda^2[1 - \cos(\omega)]^3}{[1 + 4\lambda(1 - \cos(\omega))^2]^2} \quad (17)$$

an, wobei  $\sigma_e^2$  die Varianz der Noise-Reihe des Random Walk darstellt. Danach ergeben sich in Abhängigkeit von  $\lambda$  verschiedene künstliche Periodizitäten, so 15 ZE für  $\lambda = 100$ , 30 ZE für  $\lambda = 1600$  und 43 ZE für  $\lambda = 6400$ .

Harvey/Jäger (1991) betonen, daß auch aus der HP-Trendbereinigung von Reihen, die eine I(2)-Komponente enthalten, künstliche Zyklen resultieren können, wobei zusätzlich das Verhältnis der I(1)- zur I(2)-Komponente eine Rolle spielt.<sup>55</sup> Anhand einiger Beispiele sollen die theoretisch abgeleiteten Übertragungseigenschaften des HP-Filters veranschaulicht werden.

Als erstes Beispiel betrachten wir eine Realisation eines Random Walk und filtern diese mit einem HP-Hochpaß, wobei wir hier und im folgenden einheitlich  $\lambda = 1600$  wählen. Das Spektrum der trendbereinigten Reihe (Spektrum I) in Abb. 8 zeigt neben einem Peak bei 10 ZE erwartungsgemäß auch einen Peak bei 30 ZE, der einen künstlichen Langfristzyklus indiziert. Im Vergleich zum Spektrum der 1. Differenzen des Random Walk (Spektrum II), das ebenfalls in Abb. 8 dargestellt ist, sieht man, daß durch den HP-Filter alle Frequenzen - kleiner sind als etwa 0.17 - und dabei besonders die Peak-Frequenzen - extrem verstärkt werden. Diese Ergebnisse sind insofern bemerkenswert, als die Amplitudenfunktion des HP-Filters für I(0)-Komponenten einen quasi idealen Verlauf aufweist. Würde man sich ausschließlich an dieser orientieren, wäre dieses Ergebnis nicht erklärbar.<sup>56</sup>

Als zweites Beispiel wählen wir ein Komponentenmodell

$$Y_t = T_t + C_t$$

bei dem die Trendkomponente  $T_t$  als Random Walk mit Drift und der Zyklus  $C_t$  als stochastischer Prozeß sowohl mit einer Periode von 5 als auch mit einer von 35 ZE simuliert wird. Damit ist der Fall gegeben, bei dem der Zyklus der Inputreihe dieselbe Periode aufweist, wie der durch den HP-Filter bei  $\lambda = 1600$  erzeugte künstliche Zyklus.

Für die Reihe mit dem längeren Zyklus liefert der HP-Tiefpaß-Filter eine hier nicht dargestellte glatte Komponente, die allerdings die simulierte Trendkomponente beträchtlich unterschätzt. Dies resultiert aus der Tatsache, daß die

<sup>55</sup> Harvey/Jäger (1991, S. 6): »The nature of any spurious cyclical behavior in the detrended observations depends on the relative importance of I(1) and I(2) components.«

<sup>56</sup> In ihrer Simulationsstudie zeigen Hillinger et al. (1992), daß aus der HP-Trendbereinigung eines Random Walk bei  $\lambda = 100$  künstliche Zyklen mit einer Dauer von etwa 13 Jahren und bei  $\lambda = 10$  von etwa 8 Jahren hervorgehen.

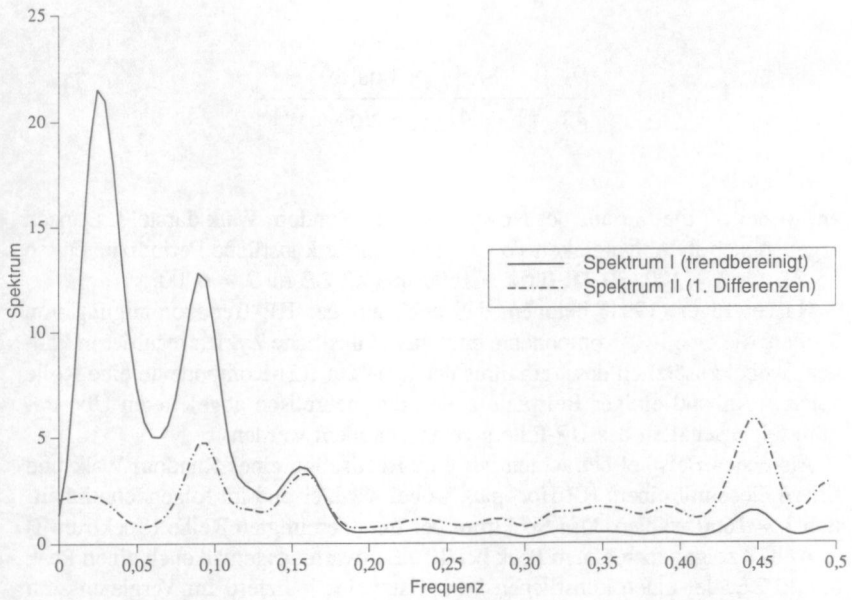


Abb. 8: Spektren unterschiedlich trendbereinigter Reihen

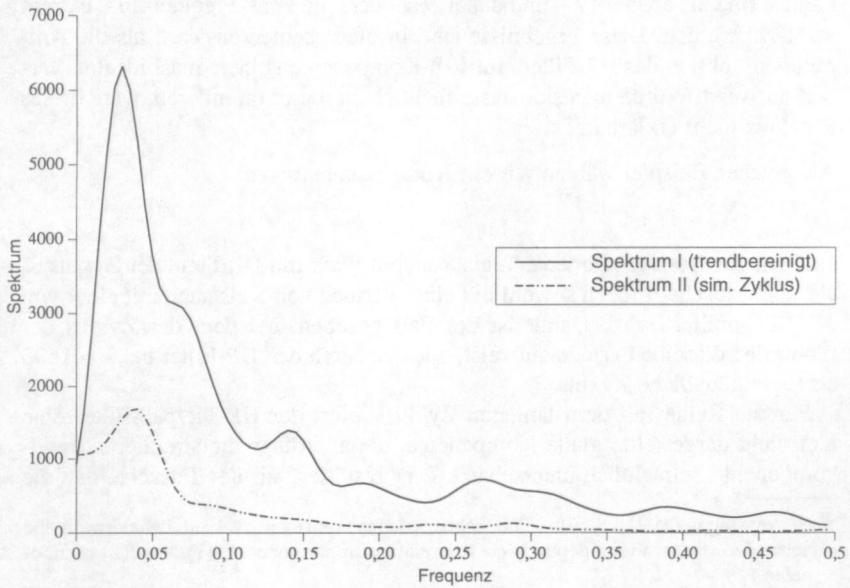


Abb. 9: Spektren unterschiedlich trendbereinigter Reihen



durch die simulierte Trendkomponente im Stoppbandbereich des Tiefpaß-Filters erzeugte spektrale Masse ausgefiltert wird. Komplementär dazu zeigt das Spektrum der HP-hochpaßgefilterten Reihe (Spektrum I) in Abb. 9 eine erhebliche Varianzverstärkung sowie eine längere Periodendauer als der simulierte Zyklus (Spektrum II). Dieser Effekt resultiert aus der Tatsache, daß sich im Paßbandbereich des Filters spektrale Masse der stationären und der nichtstationären Komponente überlagern.

Für die Reihe mit dem kürzeren Zyklus resultiert aus dem HP-Hochpaß-Filter erwartungsgemäß ein künstlicher Zyklus mit einer Periode von 30 ZE. Wie die Spektren der HP-gefilterten (Spektrum I) und der simulierten Reihe (Spektrum II) in Abb. 10 zeigen, wird der Zyklus mit der Periode von 5 ZE nahezu vollständig in den Filter-Output übertragen. Diese Beispiele demonstrieren den von Harvey und Jäger abgeleiteten Effekt, wonach der HP-Filter bei  $\lambda = 1600$  künstliche Zyklen mit einer Periode von ungefähr 30 ZE erzeugt, wenn die Trendkomponente einem Random Walk bzw. einem Random Walk mit Drift entspricht.

Im folgenden betrachten wir wiederum eine aus zwei Komponenten zusammengesetzte Reihe. Der Trend wird dabei als I(2)-Prozeß und der Zyklus als stationärer stochastischer Prozeß mit einer Periode von 35 ZE simuliert. Die Reihe wird abermals mit einem HP-Hochpaß-Filter mit  $\lambda = 1600$  trendbereinigt. Abb. 11 zeigt das Spektrum des simulierten Zyklus (Spektrum I) im Vergleich zum Spektrum der trendbereinigten Reihe (Spektrum II). Wie man sieht, werden in diesem Beispiel keine künstlichen Zyklen erzeugt: beide Spektren sind im Niederfrequenzbereich nahezu identisch. Das ist darauf zurückzuführen, daß die simulierte stationäre Komponente ausschließlich spektrale Masse im Paßbandbereich des Hochpaß-Filters erzeugt und diese nicht durch spektrale Masse der Trendkomponente überlagert wird. In diesem Beispiel entspricht die Amplitudenfunktion des Hochpaß-Filters genau den frequentiellen Eigenschaften der Komponenten. Offensichtlich hängt Art und Ausmaß künstlicher Zyklen von der relativen Bedeutung der I(1)- und I(2)-Komponenten ab.

In einem letzten Beispiel soll die Wirkungsweise des Filters für einen simulierten ARIMA(1,1,0)-Prozeß:

$$(1 - 0.9B)(1-B)Y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

demonstriert werden. Während beim ARIMA-Prozeß die Nichtstationarität aus der Integration der stationären Komponente, also aus der Existenz einer Einheitswurzel hervorgeht, resultiert die Nichtstationarität der bislang besprochenen Komponentenmodelle aus der Addition einer stationären und einer nichtstationären Komponente, so daß die zu filternde Zeitreihe auch eine nicht-integrierte Komponente enthält, was bei ARIMA-Prozessen nicht der Fall ist.

Die als ARIMA(1,1,0)-Prozeß simulierte Reihe wird wiederum mit dem HP-Hochpaß-Filter mit  $\lambda = 1600$  gefiltert. Das Spektrum der trendbereinigten Reihe (Spektrum I) ist in Abb. 12 zusammen mit dem Spektrum der 1. Dif-

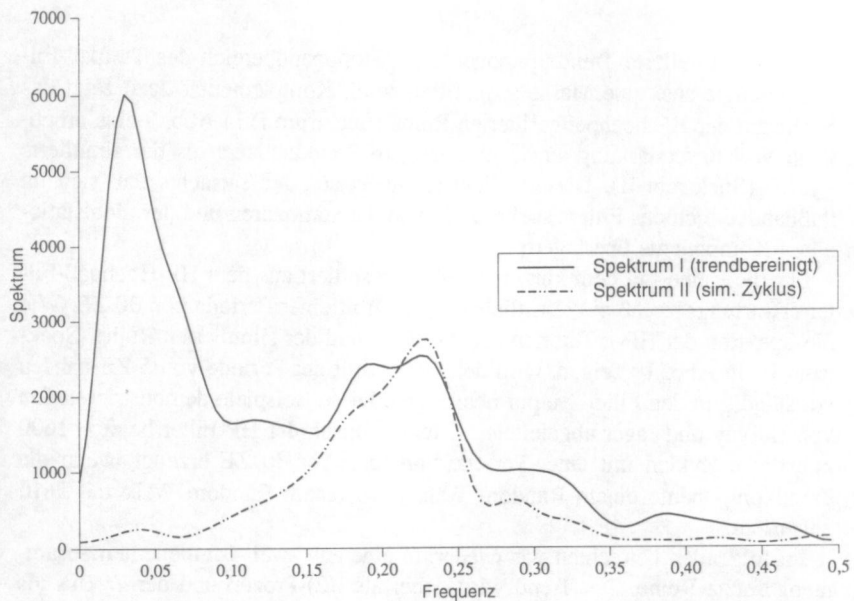


Abb. 10: Spektren unterschiedlich trendbereinigter Reihen

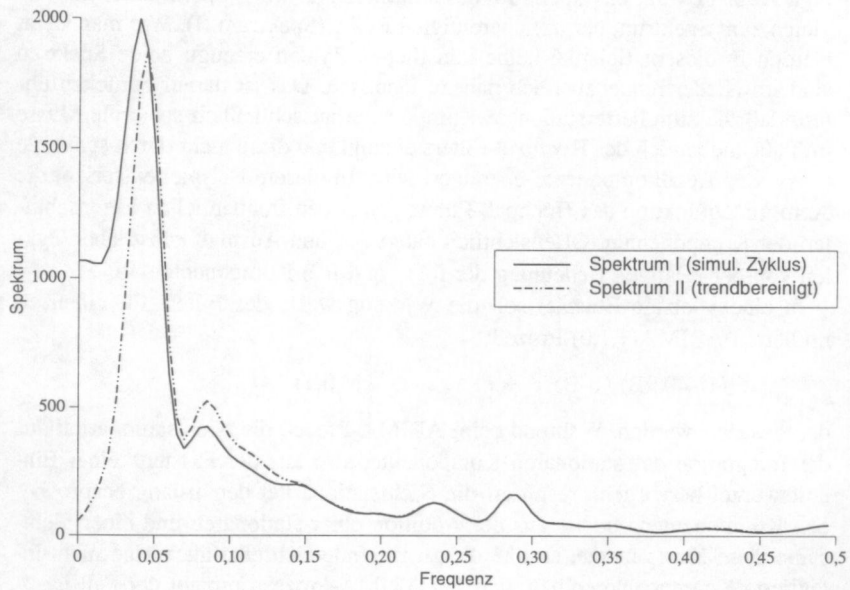


Abb. 11: Spektren unterschiedlich trendbereinigter Reihen

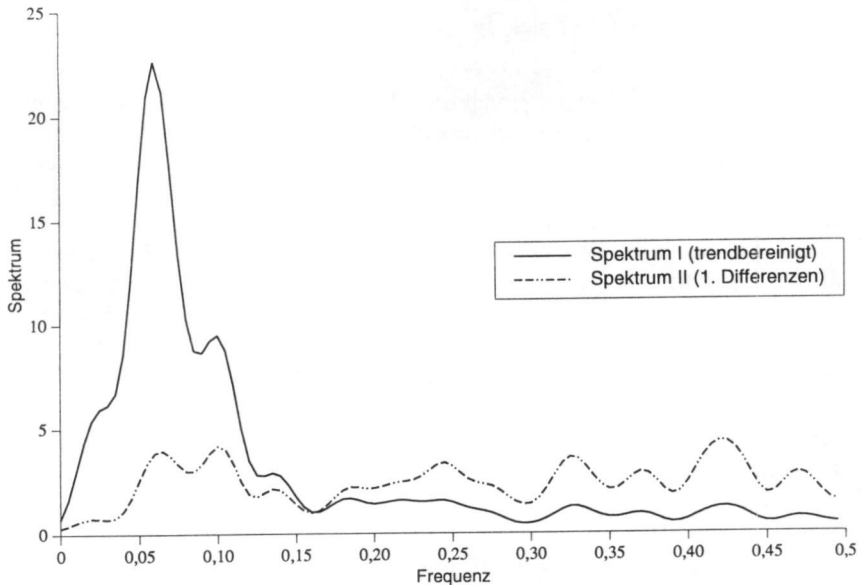


Abb. 12: Spektren unterschiedlich trendbereinigter Reihen

ferenzen des simulierten ARIMA(1,1,0)-Prozesses (Spektrum II) dargestellt. Wie man deutlich sieht, verstärkt der HP-Filter alle Frequenzen der Inputreihe ab etwa der Frequenz 0.125. Die beiden Peaks im Spektrum der 1. Differenzen bei der Frequenz 0.06 und 0.1 zeigen sich auch im Spektrum der gefilterten Reihe, allerdings in einem sehr viel geringeren Ausmaß.

Diese wenigen Beispiele belegen, daß das Spektrum der HP-hochpaßgefilterten Reihen neben der Amplitudenfunktion des Filters von der Struktur des datenerzeugenden Prozesses und bei Komponentenprozessen wesentlich auch davon abhängt, wie stark sich die Komponenten im Spektrum überlagern. Offensichtlich lassen sich die Auswirkungen eines Filters nicht nur anhand seiner Amplitudenfunktion, sondern auch in Abhängigkeit vom Spektralverhalten der verschiedenen Komponenten beurteilen. Jäger (1994) verweist darauf, daß der HP-Filter nicht grundsätzlich einen schlechten Filter darstellt, daß aber die mit ihm abgeleiteten Ergebnisse nur unter Vorbehalt interpretiert werden können: »The example does not establish that HP-filtering is always an inappropriate detrending procedure. There may exist macroeconomic time series where the assumption of a smooth and slowly changing trend with superimposed business cycle movements is indeed justified. But the example presented in this section cautions against applying HP-filtering mechanically to a wide range of macroeconomic time series without paying serious attentions to the stochastic properties of the series analyzed« (S. 499).

Nachfolgend soll die Wirkungsweise des HP-Filters noch kurz anhand der Reihe des realen Bruttoinlandsprodukts (BIP) je Einwohner der USA von 1909-1970<sup>57</sup> demonstriert werden, wobei  $\lambda$  alternativ mit 1600, 400 und 100 festgelegt wird.<sup>58</sup> Die jeweiligen Trendverläufe in Abbildung 13 variieren besonders stark dort, wo das Bruttoinlandsprodukt ausgeprägten Schwankungen folgt, also in der Mitte der Reihe. Dagegen sind sie am Reihenanfang und -ende weitgehend identisch. Diese Ähnlichkeit, trotz unterschiedlicher Amplitudenfunktionen ergibt sich auch für die in Abb. 14 dargestellten trendfreien Reihen. Wie die Spektren dieser Reihen in Abb. 15 zeigen,<sup>59</sup> beträgt die Peak-Frequenz trotz unterschiedlicher Spektralwerte einheitlich etwa 15-16 Jahre. Diese relative Stabilität der Ergebnisse ist ein Hinweis darauf, daß die Reihe in dem Frequenzbereich, in dem sich die Amplitudenfunktionen der Filter unterscheiden, nur wenig bzw. lediglich unbedeutende Schwingungskomponenten aufweist.

### Zusammenfassung

Ausgangspunkt war die Feststellung, daß den modellbasierten Verfahren der Trendbestimmung die Filterverfahren gegenüberstehen. Bei diesen repräsentiert der Trend die langfristige Veränderung im Niveau einer Reihe, weshalb er sich als niederfrequente Schwingung mit Hilfe eines Tiefpaß-Filters darstellen läßt.

Ein grundsätzliches Problem bei der Anwendung von Filtern ergibt sich aus der Tatsache, daß die Schwingungsdauer (Frequenzgehalt) weder der Trend- noch der Konjunkturkomponente bekannt ist. Da die Flexibilität der Filter eine genaue Definition der zu filternden Komponenten erforderlich macht und hierzu weder die Wachstums- bzw. die Konjunkturtheorie noch die Statistik die notwendigen Definitionskriterien liefern, ist bei der Vorgabe der jeweiligen Amplitudenfunktion ein relativ breiter Entscheidungsspielraum gegeben, weshalb sich der von Maravall (1993) erhobene Vorwurf der »ad hoc« Definition nicht ganz von der Hand weisen läßt. Entsprechende Definitionen, mit denen die empirische Forschung arbeitet - und mangels besserer Informationen arbeiten muß - basieren auf bestimmten Einschätzungen der Struktur der Reihe bzw. auf a priori festgelegten Eigenschaften der zu filternden Komponenten. Die Festlegung von  $\lambda$ , dessen Wert die Übertragungseigenschaften des Filters bestimmt, wurde deshalb auch als »Achilles-Sehne« des HP-Filters bezeichnet.

<sup>57</sup> Die Werte für das Bruttoinlandsprodukt wurden nach Angaben von Maddison (1991) berechnet.

<sup>58</sup> Auf eine Filterung mit  $\lambda = 19200$  wurde verzichtet, da die Reihe nur 62 Werte umfaßt.

<sup>59</sup> Die Spektren I, II und DJ entsprechen den HP-Zykluskomponenten mit  $\lambda = 1600, 400$  und 100.

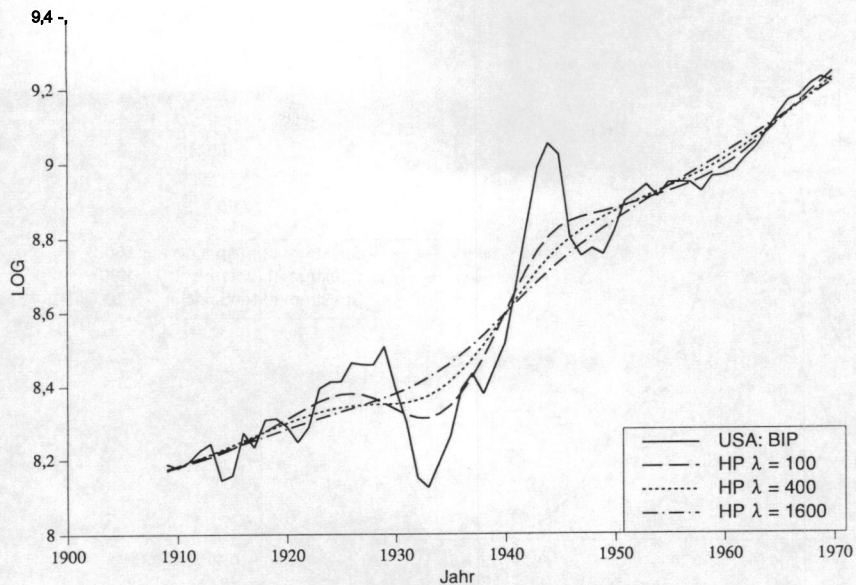


Abb. 13: BIP der USA mit verschiedenen HP-Trendkomponenten (1909-70)

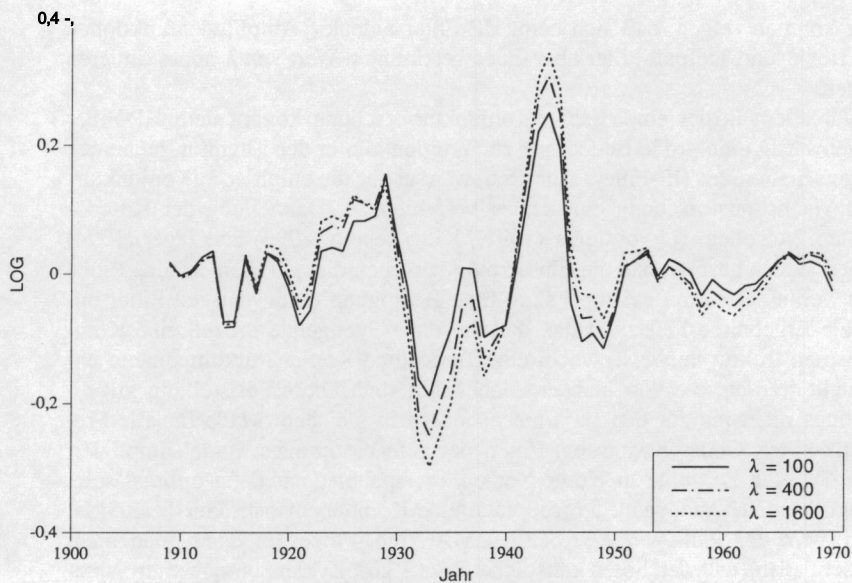


Abb. 14: Verschiedene HP-Zykluskomponenten für das BIP der USA (1909-70)

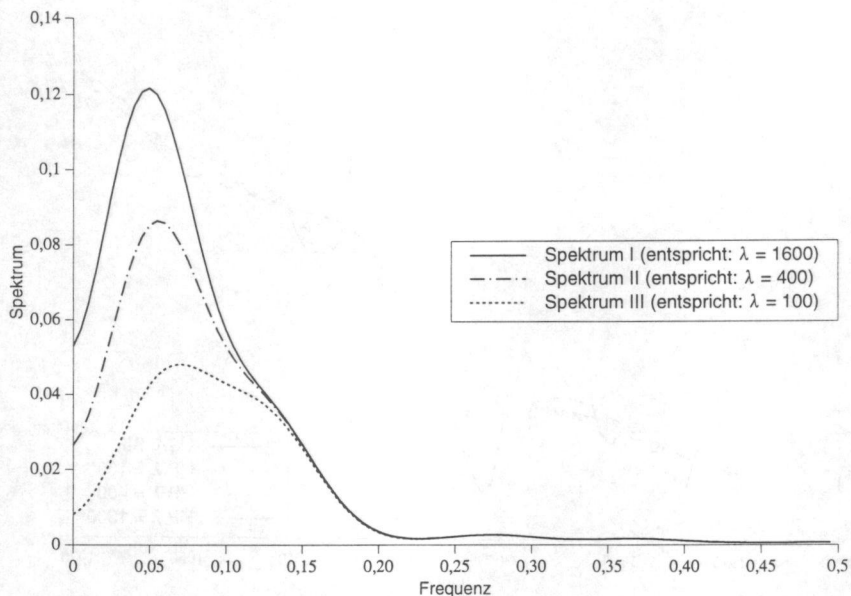


Abb. 15: Spektren unterschiedlich trendbereinigter Reihen

Wir konnten zeigen, daß sich beim HP-Filter »ideale« AmpUmdenfunktionen für Hoch- und Tiefpaß-Filter über einen bestimmten Wert von  $\lambda$  approximieren lassen.

Vor allem in der empirischen Konjunkturforschung kommt dem HP-Filter gegenwärtig eine große Bedeutung zu. Würden alle in der Literatur genannten Eigenschaften des HP-Filters zutreffen, wäre er für die empirische Konjunktur- und Wachstumsforschung ein ideales Verfahren zur Darstellung der Komponenten. Vor allem Harvey/Jäger (1991), King/Rebelo (1993) und Jäger (1994) haben jedoch gezeigt, daß die Einsatzmöglichkeiten dieses Filters an eine Reihe von Voraussetzungen geknüpft sind. Eine Bedingung dafür, daß der Filter optimale Ergebnisse liefert, ist die, daß der datenerzeugende Prozeß eine Komponentenstruktur aufweist, wobei eine Trend- und Konjunkturkomponente unterstellt werden, die voneinander unabhängig sind. Diese Feststellung gilt allerdings nicht nur für den HP-Filter, sondern in gleichem Maße für alle Frequenz-Filter. Generell kann ein Filter, der kein bestimmtes Modell impliziert und der eine Zeitreihe in Komponenten »aufspaltet«, nur dann optimal sein, wenn der datenerzeugende Prozeß auch eine Komponentenstruktur besitzt. Ist dies nicht der Fall, wie z.B. bei ARIMA(p,d,q)-Prozessen, kann man nicht ausschließen, daß der Filter künstliche Trend- und Zyklenskomponenten generiert. Zwar lassen sich z.B. für ARIMA(p,l,q)-Prozesse ebenfalls Komponenten schätzen, doch werden diese nicht als voneinander unabhängig angenommen. Es wird vielmehr unterstellt daß die Noise-Reihen, die die Trend- und Kon-



jukturschwankungen erzeugen, perfekt korreliert, m.a.W. identisch sind. Als weitere Bedingung für die Optimalität des HP-Filters formulieren King/Rebelo (1993) die Tatsache, daß der Trend als integrierter Random Walk einen relativ glatten Verlauf aufweisen muß.

Harvey/Jäger (1991) haben gezeigt, daß der HP-Filter, wie übrigens jeder andere Frequenzfilter, für I(0)-, I(1)- und I(2)-Komponenten unterschiedliche Übertragungseigenschaften aufweist. So zeigt die von ihnen abgeleitete Amplitudenfunktion für I(1)-Komponenten und  $\lambda = 1600$  einen Peak bei 30 ZE, so daß die HP-Trendbereinigung bei I(1)-Prozessen zu künstlichen Zyklen mit dieser Periodenlänge führt. Nach ihren Untersuchungen hängt die Frage, ob der Filter künstliche Zyklen erzeugt, nicht nur vom Integrationsgrad der zu filternden Reihe, sondern auch vom Spektrum der jeweiligen Komponente ab.

Unter der Bedingung, daß der datenerzeugende Prozeß die »richtige« Struktur besitzt, lassen sich unsere Ergebnisse für die simulierten Reihen folgendermaßen zusammenfassen: Der HP-Filter reproduziert die simulierten Trend- und Konjunkturkomponenten dann zutreffend, wenn die vorgegebene Amplitudenfunktion den Frequenzeigenschaften der beiden Komponenten entspricht. Unter dieser Bedingung resultieren aus diesem Filter keine Artefakte aufgrund von Verstärkungs- oder Abschwächungseffekten bzw. Phasenverschiebungen.

Ob der Filter die Komponenten eines Komponentenmodells zutreffend reproduziert, hängt allerdings nicht nur von der spezifizierten Amplitudenfunktion ab, sondern auch davon, ob sich die Schwingungskomponenten im Spektrum überlagern. Eine Komponente kann durch den Filter nur dann genau reproduziert werden, wenn sie ausschließlich bzw. vorwiegend spektrale Masse im Paßband des Filters erzeugt und wenn dieser Bereich nicht durch andere Komponenten überlagert wird. So kann der Filter z.B. Langfristzyklen nur dann exakt reproduzieren, wenn diese vorwiegend im Übertragungsbereich des Filters spektrale Masse erzeugen und diese nicht durch die Trendkomponente überlagert wird.<sup>60</sup> Weisen die Komponenten eine andere Struktur auf, als sie in der Amplitudenfunktion angenommen wird, lassen sie sich nicht in der gewünschten Weise in den Filter-Output übertragen. Schwingungskomponenten des Trends werden dann als Konjunktur ausgewiesen und vice versa.

Die häufig gestellte Forderung, der Filter müsse den stochastischen Eigenschaften der Reihe entsprechen, bezieht sich ganz wesentlich auf diese Struktur des datenerzeugenden Prozesses und nicht lediglich auf die in den 1. Differenzen zum Ausdruck kommenden Eigenschaften. Als generelles Fazit läßt sich aus diesen Überlegungen formulieren, daß der Filter nicht unabhängig von der Struktur des datenerzeugenden Prozesses eingesetzt werden kann und daß exakte Amplitude und Nullphase lediglich eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für die »Optimalität« der Filterergebnisse darstellen.

---

<sup>60</sup> Die hier genannten Probleme sind in der Simulationsstudie von Metz/Stier (1992) nur am Rande erwähnt. Ausgangspunkt waren meist deterministische Reihen, mit eng verlaufenden Spektren, bei denen solche Probleme in diesem Ausmaß nicht auftreten.

## Literatur

- Backus, D. K.; Kehoe, P. J.** (1992): International Evidence on the Historical Properties of Business Cycles. In: *American Economic Review* 82, S. 864-888.
- Bauernfeind, W.; Woitek, U.** (1994): Business Cycles in Germany 1339-1670: A Spectral Analysis of Grain Prices and Production in Nuremberg. *Münchner Wirtschaftswissenschaftliche Beiträge, Nr. 94-19*. Ludwig-Maximilians-Universität München.
- Bauernfeind, W.; Woitek, U.** (1996): Cyclical Characteristics of Tithe Series in Mid-Franconia and Switzerland 1339-1708: An Application of Maximum Entropy Spectral Analysis. In: *Historical Social Research I Historische Sozialforschung*, 21 (1), S. 122-150.
- BELL, W.** (1984): Signal Extraction for Nonstationary Time Series. In: *Annals of Statistics* 12, S. 646-664.
- Beveridge, S.; Nelson, C. R.** (1981): A New Approach to Decomposition of Economic Time Series into Permanent and Transitory Components with Particular Attention to Measurement of the »Business Cycle«. In: *Journal of Monetary Economics* 7, S. 151-174.
- Box, G. E. P.; Jenkins, G. M.** (1976): *Time Series Analysis. Forecasting and Control*. San Francisco.
- Brandner, P.; Neusser, K.** (1992): Business Cycles in Open Economies. Stylized Facts for Austria and Germany. In: *Weltwirtschaftliches Archiv* 128, S. 67-87.
- Cooley, T. F.; Ohanian, L. E.** (1991): The Cyclical Behavior of Prices. In: *Journal of Monetary Economics* 28, S. 25-60.
- Correia, I. H.; Neves, J.; Rebelo, S.** (1992): Business Cycles from 1850 to 1950. New Facts about old Data. In: *European Economic Review* 36, S. 459-467.
- Danthine, J.-P.; Donaldson, J. B.** (1993): Methodological and Empirical Issues in Real Business Cycle Theory. In: *European Economic Review* 37, S. 1-35.
- Danthine, J.-P.; Girardin, M.** (1989): Business Cycles in Switzerland. A Comparative Study. In: *European Economic Review* 33, S. 31-50.
- DA vies, H. T.** (1941): *The Analysis of Economic Time Series*. Cowles Commission for Research in Economics 6.
- ENGLUND, P.; Persson, T.; Svensson, L. E. O.** (1992): Swedish Business Cycles: 1861-1988. In: *Journal of Monetary Economics* 30, S. 343-371.
- Fahrmeier, L.** (1991): Zustandsraummodelle: Filtern, Glätten und Prognose dynamischer Systeme. In: *Allgemeines Statistisches Archiv* 75, S. 53-74.
- FINDLEY, D. F.** (1983): Comment zu Harvey/Todd (1983): In: *Journal of Business and Economic Statistics* 1, S. 309-311.



- FIORTTO, R.; KOLLINTZAS, T. (1994): Stylized Facts of Business Cycles in the G7 from a Real Business Cycles Perspective. In: *European Economic Review* 38, S. 235-269.
- GARCIA-FERRER, A.; DEL HOYO, J. (1992): On Trend Extraction Models: Interpretation, Empirical Evidence and Forecasting Performance. In: *Journal of Forecasting* 11, S. 645-665.
- HARVEY, A. C. (1985): Trends and Cycles in Macroeconomic Time Series. In: *Journal of Business and Economic Statistics* 3, S. 216-227.
- HARVEY, A. C.; JAEGER, A. (1991): *Detrending, Stylized Facts and the Business Cycle*. Discussion Paper No. London School of Economics EM/91/230.
- HARVEY, A. C.; TODD, P. H. J. (1983): Forecasting Economic Time Series with Structural and Box-Jenkins Models: A Case Study. In: *Journal of Business and Economic Statistics* 1, S. 299-307.
- HILLINGER, C.; REITER, M.; WOITEK, U. (1992): *Model-Independent Detrending for Determining the Cyclical Properties of Macroeconomic Time Series*. Münchner Wirtschaftswissenschaftliche Beiträge. Discussion Papers 92-25. München.
- HODRICK, R. J.; PRESCOTT, E. C. (1980): *Post-War U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation*. Carnegie-Mellon University, Discussion Paper No. 451, Pittsburg.
- HOELLER, P.; PORET, P. (1991): Is P-star a good Indicator of Inflationary Pressure in OECD countries? In: *Economic Studies* 17, S. 7-29.
- JÄGER, A. (1994): Mechanical Detrending by Hodrick-Prescott Filtering: A Note. In: *Empirical Economics* 19, S. 493-500.
- KING, R. G.; REBELO, S. T. (1993): Low Frequency Filtering and Real Business Cycles. In: *Journal of Economic Dynamics and Control* 17, S. 207-231.
- KOOPMAN, S. J. (1992): *Disturbance Smoother for State Space Models*. Disc. Paper London School of Economics.
- KÜRSTEINER, G.; RINDISBACHER, M. (1994): Real Business Cycle Models - Some Evidence for Switzerland. In: *Swiss Journal of Economics and Statistics* 130, S. 21-43.
- LONG, J. B. Jr.; PLOSSER, C. I. (1983): *Real Business Cycles*. In: *Journal of Political Economy* 91, S. 39-69.
- MADDISON, A. (1991): *Dynamic Forces in Capitalist Development: A Long-Run Comparative View*. Oxford u.a.
- MARAVALL, A. (1993): Stochastic Linear Trends. Models and Estimators. In: *Journal of Econometrics* 56, S. 5-37.
- METZ, R.; STTER, W. (1991): NULFIL - Ein Programm zum Filtern im Frequenzbereich mit Spektralminimierung. In: *Historical Social Research I Historische Sozialforschung*, Suppl. No. 4, S. 139-144.
- METZ, R.; STIER, W. (1992): Filter-Design in the Frequency Domain. In: KLEINKNECHT, A.; MANDEL, E.; WALLERSTEIN, I. (Hgg.): *New Findings in Long Wave Research*. London, S. 45-79.

- NELSON, C. R.; PLOSSER, C. I. (1982): Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series. In: *Journal of Monetary Economics* 10, S. 139-162.
- PAULY, R. (1995): Strukturelle Komponentenmodelle und ihr Einsatz in der Zeitreihenzerlegung. *Beiträge des Instituts für Empirische Wirtschaftsforschung, Universität Osnabrück.*
- PRESCOTT, E. C. (1986): Theory Ahead of Business-Cycle Measurement. In: BRUNNER, K.; MELTZER, A. H. (Hgg.): *Real Business Cycles, Real Exchange Rates and Actual Policies.* (- Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy 25). North-Holland/Amsterdam, S. 11-44.
- SCHIPS, B.; STIER, W. (1993): *Saisonbereinigungsverfahren in der Preisstatistik. Das CENSUS-X-11 Verfahren - Darstellung, Kritik, Alternativen.* Bundesamt für Statistik, Bern.
- SMEETS, H.-D. (1992): »Stylized Facts« zum Konjunkturverlauf in der Bundesrepublik Deutschland. In: *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik* 210, S. 512-532.
- STIER, W. (1991): Grundlagen der modernen Zeitreihenanalyse. In: BEST, H.; THOME, H. (Hgg.): *Neue Methoden der Analyse historischer Daten.* (⇒ Historisch- Sozialwissenschaftliche Forschungen 23). St. Katharinen.
- STIER, W. (1993): *Studie zur Verbesserung der schweizerischen Aussenhandelsindizes.* Oberzolldirektion, Bern.
- TICHY, G. (1994): *Konjunkturtheorie. Stilisierte Fakten, Theorie, Prognose.* 2. Aufl., Berlin u.a.
- TORRES.R.; MARTIN, J. P. (1990): Measuring Potential Output in the Seven Major OECD Countries. In: *OECD Economic Studies* 17, S. 127-149.
- WHITTAKER, E. T. (1923): On a New Method of Graduation. In: *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 41, S. 63-75.
- WHITTLE, P. (1963): *Prediction and Regulation.* Princeton.
- WHITTLE, P. (1983): *Prediction and Regulation by Linear Least-Square Methods.* 2. ergänzte und erweiterte Aufl., Minneapolis.
- WIENER, N. (1949): *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time-series.* New-York.
- WOLTERS, J. (1987): Ökonometrische Modelle bei Zeitreihendaten versus multivariate Zeitreihenmodelle - eine Übersicht In: *Statistische Hefte* 28, S. 1-25.
- WOLTERS, J. (1990): Zur ökonometrischen Modellierung kurz- und langfristiger Abhängigkeiten: Dargestellt am Beispiel der Zinsstruktur. In: NAKHAEIZADEH, G.; VOLLMER, K.-H. (Hgg.): *Neuere Entwicklungen in der Angewandten Ökonometrie. Beiträge zum 1. Karlsruher Ökonometrie-Workshop.* Heidelberg, S. 155-176.
- YOUNG, P. C; HARVEY, A. C; GARCIA-FERRER, A.; DEL HOYO, J. (1992): On Trend Extraction Models: Comments on a Paper by Garcia-Ferrer and Del Hoyo. In: *Journal of Forecasting* 11, S. 667-669.