

Regressionsanalyse mit Zeitreihendaten: zur Interpretation dynamischer Modelle

Thome, Helmut

Veröffentlichungsversion / Published Version

Zeitschriftenartikel / journal article

Zur Verfügung gestellt in Kooperation mit / provided in cooperation with:

GESIS - Leibniz-Institut für Sozialwissenschaften

Empfohlene Zitierung / Suggested Citation:

Thome, H. (1992). Regressionsanalyse mit Zeitreihendaten: zur Interpretation dynamischer Modelle. *ZA-Information / Zentralarchiv für Empirische Sozialforschung*, 30, 80-111. <https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0168-ssoar-202389>

Nutzungsbedingungen:

Dieser Text wird unter einer Deposit-Lizenz (Keine Weiterverbreitung - keine Bearbeitung) zur Verfügung gestellt. Gewährt wird ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht-kommerziellen Gebrauch bestimmt. Auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments müssen alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten werden. Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgendeiner Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Mit der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use:

This document is made available under Deposit Licence (No Redistribution - no modifications). We grant a non-exclusive, non-transferable, individual and limited right to using this document. This document is solely intended for your personal, non-commercial use. All of the copies of this documents must retain all copyright information and other information regarding legal protection. You are not allowed to alter this document in any way, to copy it for public or commercial purposes, to exhibit the document in public, to perform, distribute or otherwise use the document in public.

By using this particular document, you accept the above-stated conditions of use.



Regressionsanalyse mit Zeitreihendaten: Zur Interpretation dynamischer Modelle

von **Helmut Thome**

Abstract

Zeitreihendaten ermöglichen (unter bestimmten Voraussetzungen) die Schätzung dynamischer Regressionsmodelle, in denen der Zeitpfad der Anpassung eines Systems (repräsentiert durch die Kriteriumsvariable) an eine veränderte Bedingungskonstellation (im Vektor der Prädiktoren) spezifiziert wird. Der Artikel erläutert die formale Struktur und den analytischen Gehalt derartiger Modelle.

Time series data open up the possibility (given certain prerequisites) to estimate dynamic regression models that specify the temporal dimension in which a system (the dependent variable) responds and adjusts itself to changes in its environment represented by the vector of predictor variables. The article expounds the formal structure and analytical substance of such "distributed lag" regression models.

1. Einleitung

Auf zeitreihenanalytische Untersuchungen stößt man in der empirischen Sozialforschung nur selten. Das liegt zum einen daran, daß geeignete Datenstrukturen rar sind. Es liegt aber wohl auch daran, daß das entsprechende Methodenwissen in der Soziologie nicht weit verbreitet ist. Anwendungen zeitreihenanalytischer Verfahren findet man noch am ehesten in bestimmten Sparten der politischen Soziologie (siehe z. B. *Norpoth* 1984, *Kirchgässner* 1986) und der historisch orientierten Kriminalsoziologie (siehe z. B. *Cohen/Land* 1990, *Devine* et al. 1988). Die dort vorgestellten Regressionsmodelle variieren in der Regel folgende Gleichungsform:

$$(1) \quad Y_t = \alpha + \delta Y_{t-1} + \beta X_t + \gamma Z_t + \varepsilon_t,$$

wobei mit $t=1,2,\dots$ die gleichabständigen Meßzeitpunkte der erhobenen Variablen indiziert sind und ε_t eine stochastische Fehlerkomponente repräsentiert. Zum Beispiel untersucht

Steven Stack (1987) die Mordrate (homicide) Y_i in Abhängigkeit von der um ein Intervall zurückliegenden Mordrate Y_{i-1} , sowie mehreren exogenen Variablen wie der Arbeitslosenrate X_i und dem Vorkommen von Nachrichten über vollzogene Todesstrafen Z_i . In einer Fußnote (S. 535) erklärt er, daß er den verzögerten endogenen Term Y_{i-1} in die Schätzgleichung aufgenommen habe, um die Autokorrelation des Fehlerterms ε_i zu mindern. Die standardisierten Regressionskoeffizienten von X und Z deutet er ohne Berücksichtigung von δ als spezifische Einflußgewichte der jeweiligen exogenen Variablen. *Stacks* Interpretation ist nicht korrekt. Derartige Fehlinterpretationen findet man aber recht häufig in der soziologischen Literatur, obwohl dynamische Modelle wie Gleichung (1) in der Ökonometrie seit langem bekannt sind. Es scheint deshalb sinnvoll, noch einmal zu zeigen, worin der analytische Gehalt solcher Modelle besteht und wie ihre Parameter zu interpretieren sind. Auf Schätzprobleme gehe ich nur am Rande ein.

Das Verständnis dynamischer Modelle wird erleichtert, wenn man sich zuvor einer Voraussetzung erinnert, die bei der Interpretation der Regressionsanalyse mit Querschnittsdaten oft nicht gebührend beachtet wird. Gegeben sei das Modell

$$\begin{aligned}
 (2) \quad Y_i &= \alpha + \beta X_i + \gamma Z_i + \varepsilon_i \\
 E(\varepsilon_i) &= 0, \quad \text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2, \quad \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \quad i \neq j, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \\
 \text{Cov}(X_i, \varepsilon_i) &= 0, \quad \text{Cov}(Z_i, \varepsilon_i) = 0
 \end{aligned}$$

Die Interpretation der Steigungskoeffizienten β und γ als Kausalgewichte der exogenen Variablen wird üblicherweise in Form eines Bedingungssatzes gegeben: Wenn X (Z) um eine Einheit zunimmt (zunahme), nimmt (nähme) Y durchschnittlich um β (γ) Einheiten zu. Die Veränderung selbst kann jedoch mit Querschnittsdaten nicht beobachtet werden; sie wird quasi simuliert, indem man bei den verschiedenen Untersuchungsobjekten unterschiedliche Werte für die einzelnen Variablen beobachtet und voraussetzt, daß bei allen Untersuchungseinheiten der gleiche strukturelle Zusammenhang vorliegt. Die Kausalinterpretation ist aber nur dann sinnvoll, wenn sich die Daten zum Zeitpunkt der Messung in Ruhelage (Äquilibrium) befinden. Das heißt, zum Zeitpunkt der Messung muß jede vor der Messung abgelaufene (aber nicht beobachtete) Änderung von X - oder Z -Werten sich bereits voll auf Y ausgewirkt haben, andernfalls ist mit einer Verzerrung der geschätzten Regressionskoeffizienten zu rechnen. Wenn die (nicht beobachtete) Veränderungsrate von Y mit einer unabhängigen Variablen korreliert, wird der entsprechende Steigungskoeffizient, andernfalls nur der Ordinatenabschnitt verzerrt geschätzt. Die Gleichgewichtsvoraussetzung, die in Lehrbüchern und in der Forschungspraxis oft unterschlagen wird, ist in

vielen sozialwissenschaftlichen Untersuchungen sicherlich nicht erfüllt.

2. Übergang von der statischen zur dynamischen Zeitreihenanalyse

Zeitreihenanalyse ist eine Form der dynamischen Analyse, bei der man die Äquilibriumsvoraussetzung fallen läßt oder wenigstens fallen lassen kann. Das heißt, man erhält die Möglichkeit, die Anpassung eines Systems in der Merkmalsdimension Y an eine veränderte Bedingungskonstellation (im Vektor der Prädiktoren) über Zeit zu rekonstruieren. Allerdings werden auch Zusammenhänge zwischen Zeitreihen gelegentlich in **statischer** Weise analysiert, beispielsweise mit folgendem Modell:

$$(3) \quad Y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma Z_t + \varepsilon_t$$

Im Unterschied zur Querschnittsanalyse werden die Messungen jetzt nicht an n Objekten, sondern an einem einzigen Objekt über $[T]$ diskrete Zeitpunkte $t=1,2,\dots,T$ vorgenommen. Die Annahme unkorrelierter Fehler ist bei Zeitreihendaten in der Regel nicht haltbar - mit den bekannten Konsequenzen für die Schätzung der Parameter und ihrer Standardfehler (s. z. B. *Kmenta* 1986). Die Interpretation der Steigungskoeffizienten ändert sich im Vergleich zur Querschnittsanalyse jedoch nicht: die Koeffizienten β und γ geben an, um wieviel Einheiten sich Y_t in Reaktion auf Einheitsänderungen in X , bzw. Z , ändert. Im Modell (3) wird angenommen, daß sich diese Reaktion "sofort", also noch innerhalb des gleichen Meßintervalls, vollzieht, in dem die Änderungen in X bzw. Z auftraten. Das heißt, die Äquilibriumsvoraussetzung wird auch hier praktisch als erfüllt betrachtet; eine Veränderungsmessung ist nicht Bestandteil des Modells. Einen ersten Schritt in Richtung **dynamischer** Analyse unternimmt man hingegen mit der folgenden Gleichung:

$$(4) \quad Y_t = \alpha + \beta X_{t-k} + \gamma Z_{t-l} + \varepsilon_t, \text{ wobei } 0 < k, l < T$$

In diesem Modell wird angenommen, daß sich eine Änderung in X (Z) zum Zeitpunkt t erst nach k (l) Zeitintervallen in Y auswirkt, daß nach diesem Zeitpunkt aber keine zusätzlichen Wirkungen mehr eintreten. Man kann dieses Modell dadurch erweitern, daß man die Wirkung von X oder/und Z auf mehrere Intervalle ausdehnt, z. B.

$$(5) \quad Y_t = \alpha + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \beta_3 X_{t-3} + \gamma Z_{t-l} + \varepsilon_t$$

Jetzt wird angenommen, daß eine Änderung in X zum Zeitpunkt t mehrere Intervalle benötigt, um sich voll auf Y auszuwirken; sie wird erstmals sichtbar nach einem Intervall und erhält weitere Zuwächse in den beiden folgenden Intervallen. Man beachte, daß die Stei-

gungskoeffizienten **partielle** Koeffizienten darstellen, d. h., die volle (erwartete) Änderung in Y auf einen dauerhaften Einheitszuwachs in X ist mit $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ gegeben. Modelle wie Gleichung (5) werden auch als "dynamisch in X " bezeichnet. Der Begriff der "dynamischen Regression" oder "distributed lag regression" wird meistens jedoch für Modelle reserviert, die mindestens einen verzögerten endogenen Term, z. B. Y_{t-1} , in die rechte Gleichungsseite mit aufnehmen, wie oben in Gleichung (1). Um solche Modelle verstehen zu können, betrachten wir zunächst folgende Gleichung:

$$(6) \quad Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \dots + \beta_{\infty} X_{t-\infty} + \varepsilon_t$$

Hinsichtlich des Fehlerterms ε_t sollen (einstweilen) die Voraussetzungen analog zu Modell (2) gelten. Modell (6) bezeichnet man als "general infinite lag structure" (*Dhrymes* 1971, S. 30 f.); es ist die allgemeinste Form des Regressionsmodells mit verteilten Verzögerungen (Lags) bei nur einer exogenen Variablen. Es ist klar, daß man die unendlich große Zahl der Parameter eines solchen Modells nicht schätzen kann. Man kann es aber als Basismodell benutzen, aus dem sich mittels Parameter-Restriktionen realistische Modelle gewinnen lassen. Oft reicht aber das theoretische Wissen nicht aus, um im voraus sagen zu können, über wieviele Beobachtungsintervalle sich eine Wirkung von X auf Y entfaltet. Möglicherweise gibt es aber eine begründete Vorstellung über die Form des Zeitpfads dieser Wirkung. Man könnte z. B. annehmen, daß sie innerhalb des ersten Beobachtungsintervalls am stärksten ist und daß die in den nächsten Perioden hinzukommenden Effekte geometrisch abnehmen.

Die Annahme der geometrischen Abflachung der Wirkungskurve läßt sich formal ausdrücken in der Gleichung

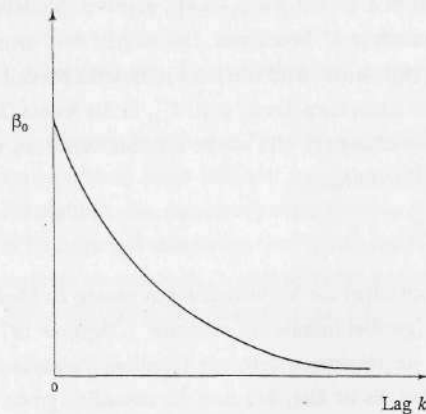
$$(7) \quad \beta_k = \beta_0 \delta^k ; \quad k = 1, 2, \dots, \quad 0 < \delta < 1$$

Nach der Anfangswirkung β_0 lassen sich alle nachfolgenden β 's als Produkt aus β_0 und einer noch zu bestimmenden Potenzzahl δ errechnen. Wenn man die Koeffizientenrestriktion für die Beta-Gewichte gemäß Gleichung (7) in Gleichung (6) einführt, erhält man

$$(8) \quad Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_0 \delta X_{t-1} + \beta_0 \delta^2 X_{t-2} + \dots + \beta_0 \delta^{\infty} X_{t-\infty} + \varepsilon_t$$

Schematisch läßt sich die Abfolge der (partiellen!) Regressionskoeffizienten wie in Abb. 1 darstellen.

Abb. 1: Muster der Regressionskoeffizienten eines geometrischen Lag-Modells



Der Abschwung führt um so steiler gegen Null, je kleiner das Gewicht δ ist. Betrachtet man die Koeffizienten β_k als Funktion des Lags $k = 0, 1, 2, \dots$, so spricht man allgemein von einer "Antwortfunktion" oder einer "impulse-response-function". Modell (8) enthält nur noch drei unbekannte Parameter: α , β_0 und δ . Wie können sie, wie kann insbesondere δ geschätzt werden? Die Schätzung wird durch eine Reparametrisierung (*Koyck-Transformation*) der Gleichung (8) ermöglicht. Wenn Gleichung (8) gilt, dann gilt auch

$$(9) \quad Y_{t-1} = \alpha + \beta_0 X_{t-1} + \beta_0 \delta X_{t-2} + \dots + \varepsilon_{t-1}$$

Gleichung (9) multipliziert mit dem Faktor δ führt zu

$$(10) \quad \delta Y_{t-1} = \alpha \delta + \beta_0 \delta X_{t-1} + \beta_0 \delta^2 X_{t-2} + \dots + \delta \varepsilon_{t-1}$$

Im nächsten Schritt subtrahieren wir Gleichung (10) von Gleichung (8)

$$(11) \quad Y_t - \delta Y_{t-1} = (\alpha - \delta \alpha) + \beta_0 X_t + (\varepsilon_t - \delta \varepsilon_{t-1})$$

Wenn wir $\alpha^* = (\alpha - \delta \alpha)$ und $\varepsilon_t^* = \varepsilon_t - \delta \varepsilon_{t-1}$ (Fehler-Autokorrelation 1. Ordnung!) schreiben und die Ausdrücke in Gleichung (11) neu ordnen, erhalten wir die Schätzequation

$$(12) \quad Y_t = \alpha^* + \delta Y_{t-1} + \beta_0 X_t + \varepsilon_t^* \quad , \quad 0 < \delta < 1$$

Wenn δ und β_0 bekannt bzw. geschätzt sind, lassen sich die einzelnen Beta-Gewichte der Ausgangsgleichung (6) gemäß Gleichung (7) ermitteln und somit das Anpassungsverhalten des Systems über Zeit beschreiben. Das übliche Kleinstquadratverfahren (OLS-



Regression) ist jedoch auf Gleichung (12) nicht anwendbar. Die Kombination autokorrelierter Fehler und verzögerter endogener Variablen als Regressor auf der rechten Seite der Modellgleichung läßt die OLS-Schätzer inkonsistent werden (*Johnston 1972, S. 307*); wie Gleichung (9) zu entnehmen ist, sind der Regressor Y_{t-1} und der Fehlerterm ε_{t-1} miteinander korreliert. Diese Problematik möchte ich jedoch hier nicht erörtern (zu alternativen Schätzverfahren siehe *Hibbs (1974)* und *Judge et al. (1980, S. 170 ff.)*).

Gleichung (12) ähnelt bereits stark Gleichung (1), die unsere Betrachtungen auslöste. Die inhaltliche Bedeutung des Modells (12) erschließt sich vielleicht am ehesten anhand einer Beispielrechnung, in der wir die erwartbare, zeitlich gestreckte Reaktion von Y auf drei unterschiedliche Formen der Input-Änderung in X für das Modell

$$E(Y_t) = 0,5Y_{t-1} + 0,5X_t$$

ermitteln. Anhand der folgenden Tabelle 1 betrachten wir die Y -Reaktion auf (a) einen *Pulse-Input* (Spalte a), der das X -Niveau zu einem bestimmten Zeitpunkt t vorübergehend von 0 auf 1 anhebt, (b) einen *Step-Input* (Spalte b), der das X -Niveau zu einem bestimmten Zeitpunkt t dauerhaft von 0 auf 1 erhöht, sowie (c) einen allgemeinen, stochastischen Input mit ständig wechselnden X -Werten.

Tabelle 1

Output-Entwicklung bei verschiedenen Input-Formen im Modell
 $E(Y_t) = 0,5Y_{t-1} + 2,5X_{t-1}$

| | a | | b | | c | | d | | e | |
|---|-------------|-----------|------------|---------------------------|-------|----------------------------|-------|----------------------------|---------------|--------|
| t | x_t | y_t | x_t | y_t | x_t | y_t | x_t | y_t | x_t | y_t |
| | Pulse Input | Output | Step Input | Output | Input | Output | Input | Output | General Input | Output |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2,0 | 8,0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1,5 | 0 | 3,5 | 9,0 | 1,5 | 0 |
| 2 | 0 | 2,5 | 1 | 2,5 | 0,5 | 3,75 | 2,5 | 13,25 | 0,5 | 3,75 |
| 3 | 0 | 1,25 | 1 | 3,75 | 2,0 | 3,12 | 4,0 | 12,87 | 2,0 | 3,12 |
| 4 | 0 | 0,62 | 1 | 4,38 | 2,0 | 6,56 | 4,0 | 16,44 | 1,0 | 6,56 |
| 5 | 0 | 0,31 | 1 | 4,69 | 2,0 | 8,28 | 4,0 | 16,22 | -2,5 | 5,78 |
| 6 | 0 | 0,16 | 1 | 4,84 | 2,0 | 9,14 | 4,0 | 19,11 | 0,5 | -3,36 |
| 7 | 0 | 0,08 | 1 | 4,92 | 2,0 | 9,57 | 4,0 | 19,56 | 1,0 | 0,43 |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | $Y_g=0,0$ | . | $Y_g=5,0$ $=G \cdot 1$ | . | $Y_g=10,0$ $=G \cdot 2$ | . | $Y_g=20,0$ $=G \cdot 4$ | . | . |

Quelle: *Box und Jenkins* (1976, S. 354) sowie eigene Berechnungen

Tabelle 2 zeigt das Berechnungsschema für den Pulse-Input; die Modifikationen für die anderen Input-Formen sind offensichtlich, so daß sie hier nicht demonstriert werden müssen.



Tabelle 2

Zeitpfad des Modells $E(Y_t) = 0,5Y_{t-1} + 2,5X_t$ bei einem Pulse-Input

| Zeitperiode t | Y_t | Y_{t-1} | X_t | Lag k |
|--------------------|--------------------------|-------------------|-------|---------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | $\beta_0 = 2,5$ | 0 | 1 | 0 |
| 2 | $\beta_0\delta = 1,25$ | β_0 | 0 | 1 |
| 3 | $\beta_0\delta^2 = 0,62$ | $\beta_0\delta$ | 0 | 2 |
| 4 | $\beta_0\delta^3 = 0,31$ | $\beta_0\delta^2$ | 0 | 3 |
| | ... | ... | | |

Bei einem Pulse-Input der Größe $|1|$ ist der Zeitpfad der Anpassungsreaktion in Y unmittelbar durch die Folge der β -Koeffizienten der Gleichung (6) gegeben, die sich über die Restriktionsgleichung (7) aus den Parametern unseres Beispielmodells berechnen lassen. Bei einem Step-Input paßt sich Y allmählich an ein neues Niveau, einen neuen Gleichgewichtswert Y_g an. Der Gleichgewichtszuwachs G pro Einheitszuwachs in X ergibt sich als Grenzwert aus der Addition der (partiellen) Steigungskoeffizienten, wie ein Vergleich der entsprechenden Ergebnisspalten in Tab. 1 (Spalten a und b) zeigt:

$$(13) \quad G = \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_\infty \\ = \beta_0 \sum_{k=1}^{\infty} \delta^k, \quad 0 < \delta < 1$$

Da die Summanden in Gleichung (13) eine geometrische Reihe bilden, läßt sich der Grenzwert unmittelbar aus den Parametern des reduzierten Modells (12) errechnen:



$$(14) \quad G = \frac{\beta_0}{1 - \delta} = \frac{2,5}{1 - 0,5} = 5$$

Die Beispiele in den Spalten *c* und *d* der Tabelle 1 zeigen, daß (in einem linearen Modell) der Gleichgewichtszuwachs in *Y* pro dauerhaftem *X*-Zuwachs um 1 Einheit völlig unabhängig ist von den Anfangswerten der beiden Variablen und der numerischen Größe des Niveausprungs in *X*. Der erwartete Gleichgewichtswert Y_g läßt sich somit als Funktion des Gleichgewichtswerts X_g (falls existent) darstellen:

$$E(Y_g) = \alpha + G \cdot X_g$$

Der Koeffizient G entspricht also dem Steigungskoeffizienten β im statischen Regressionsmodell für Querschnittsdaten. Die drei Input-Formen von X führen zu unterschiedlich präzisen Schätzungen des G -Koeffizienten. Es ist auch damit zu rechnen, daß ein soziales System jeweils andere Anpassungsmechanismen entwickelt, je nachdem, ob die Bedingungskonstellationen einmalig, dauerhaft oder ständig wechseln, so daß der errechnete Gleichgewichtszuwachs eine etwas unsichere analytische Konstruktion ist, wenn er auf der Basis stochastischer Input-Werte ermittelt wird. Beispiele für komplexere Anpassungsreaktionen werden weiter unten präsentiert.

Bisher haben wir zwei Elemente des analytischen Gehalts der dynamischen Regressionsgleichung (12) herausgearbeitet:

(a) Sie läßt sich als Reparametrisierung der Gleichung (6) verstehen, wenn die β -Koeffizienten in bestimmter Weise restringiert werden. Das bedeutet, das kausale Gewicht von X hängt nicht nur von dem Parameter β_0 , sondern auch von dem Parameter δ ab und drückt sich numerisch in dem Gleichgewichtskoeffizienten G aus. Der endogene Regressor Y_{t-1} repräsentiert in dem theoretischen Modell (12) also keine externen Einflußgrößen außer X . Falls das Modell (12) unterspezifiziert ist, wird der Koeffizient δ in der Regel einiges von dem Einflußgewicht der ausgelassenen Variablen aufsaugen. Das bedeutet, daß er in diesem Falle nicht konsistent geschätzt wird. Es bedeutet nicht, daß der Mangel der Unterspezifikation auf diese Weise zu beseitigen oder auch nur zu mindern wäre. Auch sollte der Regressor Y_{t-1} nicht in der bisher vorgestellten Weise mit dem Zweck in das Schätzmodell eingeführt werden, die Autokorrelation der Fehler zu verringern. Dazu unten mehr.

(b) Der zweite Aspekt des bisher herausgearbeiteten analytischen Gehalts bestand darin, zu zeigen, wie der Zeitpfad der Wirkung von X auf Y sowie das neue (hypothetische) Gleich-

gewichtsniveau anhand der Modellparameter ermittelt werden kann.

Als nächstes ist zu erläutern, wie sich geometrische Lag-Modelle in Form der Gleichung (12) substanztheoretisch begründen lassen. Dabei geht es nicht um den spezifischen Inhalt einer substanzwissenschaftlichen Theorie, sondern lediglich darum, die Übersetzung theoretischer Überlegungen in dynamische Regressionsmodelle allgemein zu veranschaulichen.

3. Eine substanztheoretische Begründung für geometrische Lag-Modelle

In der Ökonomie wird in mancherlei Zusammenhängen das Verhalten im Sinne eines adaptiven Erwartungsmodells ("adaptive expectation model") gedeutet. Dessen Grundstruktur läßt sich wie folgt formalisieren:

$$(15) \quad Y_t = \alpha + \beta X_{t+1}^* + \varepsilon_t,$$

wobei für den stochastischen Fehlerterm wiederum die üblichen Bedingungen analog zu Modell (2) gelten sollen. Die abhängige Variable Y_t (z. B. die gegenwärtig nachgefragte Gütermenge) soll von dem *erwarteten* Wert X_{t+1}^* der Prädiktorvariable (z. B. dem für die Zukunft erhofften Einkommen) abhängen. Wenn man den erwarteten Wert nicht direkt beobachten kann, benötigt man eine theoretische Vorstellung, wie die Erwartungen sich als Funktion beobachtbarer Größen entwickeln. Es wird z. B. angenommen, daß sich das für die Periode $t+1$ erwartete Einkommen als gewichteter Durchschnitt aus dem gegenwärtig, zum Zeitpunkt t , erzielten und dem für diesen Zeitpunkt erwarteten Einkommen ergibt:

$$(16) \quad X_{t+1}^* = \delta X_t^* + (1-\delta)X_t, \quad \delta < 1$$

Offensichtlich gilt dann auch

$$(17) \quad X_t^* = \delta X_{t-1}^* + (1-\delta)X_{t-1}$$

Durch Einsetzen von Gleichung (17) in Gleichung (16) erhält man

$$(18) \quad \begin{aligned} X_{t+1}^* &= \delta[\delta X_{t-1}^* + (1-\delta)X_{t-1}] + (1-\delta)X_t \\ &= (1-\delta)(X_t + \delta X_{t-1}) + \delta^2 X_{t-1} \end{aligned}$$

Durch fortgesetzte Substitution der gesterntten X-Terme ergibt sich

$$(19) \quad X_{t+1}^* = (1-\delta)(X_t + \delta X_{t-1} + \delta^2 X_{t-2} + \dots)$$

Dieser Ausdruck, eingesetzt in Gleichung (15), führt unmittelbar zu dem geometrischen Lag-Modell

$$(20) \quad Y_t = \alpha + \beta(1-\delta)(X_t + \delta X_{t-1} + \delta^2 X_{t-2} + \dots) + \varepsilon_t$$

das identisch ist mit Gleichung (8), wenn man den Koeffizienten $\beta(1-\delta) = \beta_0$ setzt.¹

Die modelltheoretischen Überlegungen könnten noch weitergetrieben werden, indem man zeigte, unter welchen Bedingungen das Modell adaptiver Erwartungen sich als Spezialfall des allgemeineren Modells der rationalen Erwartungsbildung darstellt. Hierzu sei aber lediglich auf die einschlägige Literatur verwiesen (siehe z. B. *Judge et al.* 1980, S. 626 ff. oder *Kmenta* 1986, S. 529, 544 ff. und das sozialwissenschaftliche Anwendungsbeispiel in *Kirchgässner* 1985 a). Hinzuweisen ist auch auf das "partial adjustment" bzw. "habit persistence model", in dem eine verhaltenstheoretische Hypothese ebenfalls in ein geometrisches Lag-Modell analog zu Gleichung (12) übersetzt wird, diesmal allerdings mit der Möglichkeit, eine unkorrelierte Fehlerstruktur für die Schätzgleichung annehmen zu können (s. *Dhrymes* 1971, S. 58; *Judge et al.* 1980, S. 626 f., 630; *Kmenta* 1986, S. 529 f.)

4. Autokorrelatives Fehlermodell vs. geometrische Lagstruktur des strukturellen Zusammenhangs

Wie allgemein bekannt, führt die Methode der kleinsten Quadrate bei autokorrelierten Fehlern zu nicht-effizienten Schätzungen der Regressionsparameter und zu Verzerrungen in der Schätzung ihrer Standardfehler. Alternative Schätzmethoden beinhalten häufig Variablentransformationen, die im Endeffekt ebenfalls einen verzögerten endogenen Term in die Regressionsgleichung einführen. Vermutlich verführt dies manche Forschungspraktiker dazu, die Größe Y_{t-1} auch dann in die Regressionsgleichung einzuführen, wenn nicht eine geometrische Lag-Struktur für die Beziehung zwischen abhängiger und unabhängiger Variable postuliert, sondern lediglich eine autoregressive Fehlerstruktur bewältigt werden soll - wie etwa:

¹ Da das Erwartungsmodell (16) zunächst auf der Individualebene formuliert wird, die Zeitreihendaten in der Regel aber für ein Kollektiv erhoben werden, müßte man zusätzliche Annahmen einführen, um das Modell auch auf der Aggregatebene begründen zu können.



$$(21) \quad Y_t = \beta X_t + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t, \quad |\rho| < 1$$

(mit den Standard-Annahmen über den stochastischen Term u_t). Diese beiden Modellkomponenten sind jedoch konzeptuell und formal strikt getrennt. Für das häufig angewandte *Cochrane/Orcutt-Schätzverfahren* läßt sich dies z. B. in folgender Weise zeigen (vergl. *Dhrymes* 1971, S. 59 ff.; *Kmenta* 1986, S. 314 ff.): In einem ersten Schritt werden die Residuen ε_t in (21) durch die OLS-Residuen e_t ersetzt, und der Koeffizient ρ wird anhand der Stichproben-Autokorrelation (unter Verlust des ersten Beobachtungswertes) geschätzt²:

$$(22) \quad \hat{\rho} = \frac{\sum e_t e_{t-1}}{\sum e_{t-1}^2}; \quad t = 2, 3, \dots, T$$

Mit Hilfe dieses Schätzers wird die Regressionsgleichung wie folgt transformiert:

$$(23) \quad Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t \\ (Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1}) = \alpha - \hat{\rho} \alpha + \beta (X_t - \hat{\rho} X_{t-1}) + \hat{u}_t \\ Y_t^* = \alpha^* + \beta X_t^* + \hat{u}_t; \quad Y_t^* = Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1}, \quad X_t^* = X_t - \hat{\rho} X_{t-1}$$

Mit den so transformierten Daten ("generalized differences") können die Modellparameter α und β mit dem gewöhnlichen Kleinstquadratverfahren (OLS-Regression) geschätzt werden³. Die Transformation in Gleichung (23) hat die Struktur der Beziehung zwischen Y und X nicht verändert, da beide Variablen in gleicher Weise (mit dem gleichen "Filter") transformiert wurden. Daß dieses statische Modell mit autoregressiver Fehlerstruktur gelegentlich mit einem dynamischen Modell verwechselt wird, liegt vermutlich an der möglichen Umstellung der Terme der zweiten Zeile in Gleichung (23), die sich wie folgt schreiben läßt:

² Die OLS-Residuen sind bei kleinen Stichproben (Daumenregel: $T < 50$) verzerrt; dennoch ist der Schätzer für ρ konsistent. Über die Eigenschaften verschiedener Schätzer siehe *Judge* et al. 1980, S. 182 ff. in Verbindung mit S. 212 ff. sowie *Kmenta* 1986, S. 315).

³ Die oft praktizierte Transformation $Y_t^* = Y_t - Y_{t-1}$ und $X_t^* = X_t - X_{t-1}$ (einfache Differenzbildung) führt zu einer verzerrten Schätzung der Standardfehler des Steigungskoeffizienten, ist also nicht empfehlenswert, wenn ρ nicht tatsächlich in der Nähe von eins liegt (s. *Kmenta* 1986: 322).



$$(23 \text{ a}) \quad Y_t = \alpha^* + \rho Y_{t-1} + \beta X_t - \rho \beta X_{t-1} + \hat{u}_t, \quad \alpha^* = \alpha - \rho \alpha$$

Dieses Modell scheint sich formal von dem geometrischen Lag-Modell (12) nur durch die Hinzunahme des verzögerten Terms der exogenen Variablen zu unterscheiden. Man beachte aber die Parameterrestriktion: Der Koeffizient von X_{t-1} ist gleich dem negativen Produkt der Koeffizienten von X_t und Y_{t-1} . Was diese Restriktion inhaltlich bedeutet, läßt sich leicht erkennen, wenn man (unter Voraussetzung der Stationarität des Prozesses) Gleichung (23) um ein Intervall verschiebt:

$$(23 \text{ b}) \quad Y_{t-1} = \alpha + \beta X_{t-1} + \epsilon_{t-1}$$

Wenn wir diesen Ausdruck für Y_{t-1} in Gleichung (23 a) einsetzen, erhalten wir

$$(23 \text{ c}) \quad \begin{aligned} Y_t &= \alpha^* + (\rho \alpha + \rho \beta X_{t-1} + \rho \epsilon_{t-1}) + \beta X_t - \rho \beta X_{t-1} + \hat{u}_t \\ &= (\alpha - \rho \alpha) + \rho \alpha + \rho \beta X_{t-1} - \rho \beta X_{t-1} + \beta X_t + \rho \epsilon_{t-1} + \hat{u}_t \\ &= \alpha + \beta X_t + \epsilon_t \end{aligned}$$

Da Y_{t-1} selbst eine Funktion von βX_{t-1} ist, heben sich die beiden Ausdrücke durch die ρ -Gewichtung mit entgegengesetztem Vorzeichen auf. Dies wird weiter verdeutlicht, wenn wir das folgende dynamische Modell (24) betrachten, das eine geometrische Lag-Struktur enthält, die sich von der des Modells (12) lediglich durch die Hinzunahme des verzögerten Terms der *exogenen* Variablen, X_{t-1} , unterscheidet:

$$(24) \quad Y_t = \alpha + \delta Y_{t-1} + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \epsilon_t, \quad 0 < \delta < 1$$

Dieses dynamische Modell ähnelt noch stärker als Modell (12) dem statischen Regressionsmodell der Gleichung (23). Der entscheidende Unterschied besteht darin, daß in Gleichung (24) der Parameter β_1 nicht restringiert ist. Dadurch ergibt sich eine über Zeit verteilte Wirkung von X nach Y , ein Zeitpfad, dessen Verlauf Tabelle 3 darstellt.



Tabelle 3

Zeitpfad des Modells $E(Y_t) = \delta Y_{t-1} + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1}$ bei einem Pulse-Input

| Zeitperiode t | Y_t | Y_{t-1} | X_t | X_{t-1} | Lag k |
|--------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|-------|-----------|---------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | β_0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | $\beta_0 \delta + \beta_1$ | β_0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | $(\beta_0 \delta + \beta_1) \delta$ | $\beta_0 \delta + \beta_1$ | 0 | 0 | 2 |
| 4 | $(\beta_0 \delta + \beta_1) \delta^2$ | $(\beta_0 \delta + \beta_1) \delta$ | 0 | 0 | 3 |
| 5 | $(\beta_0 \delta + \beta_1) \delta^3$ | $(\beta_0 \delta + \beta_1) \delta^2$ | 0 | 0 | 4 |
| . | ... | ... | . | . | . |

Gegenüber dem Modell (12) beginnt der geometrische Abfall des Zeitprofils der "impulse-response-function" (also der Wirkungszuwächse) jetzt ein Intervall später. In Modell (24) ist der maximale Lag der X -Variable $k=1$; theoretisch könnte der maximale Lag irgendeinen Wert zwischen 0 und T annehmen: $0 \leq k < T$. Allgemein gilt, daß der durch den Koeffizienten δ gesteuerte geometrische Abschwung bei dem Intervall $k+1$ beginnt. Der Unterschied zwischen einem autoregressiven Fehlermodell 1. Ordnung - wie in Gleichung (23) - und einem geometrischen Lag-Modell wie in Gleichung (24) wird durch Tab. 3 nochmals verdeutlicht: Im Falle der Koeffizientenrestriktion $\beta_1 = -\beta_0 \delta$ wird die Summe $\beta_0 \delta + \beta_1$ gleich Null.

Nun ist der Sozialforscher aber häufig nicht in der Lage, sich aus theoretischen Gründen a priori entweder für ein dynamisches Regressionsmodell wie in Gleichung (24) oder ein statisches Regressionsmodell mit autoregressiver Fehlerstruktur wie in Gleichung (23) zu entscheiden. Mit Stichprobenschätzern wird man aber kaum jemals die Identität $\beta_0 \delta + \beta_1 = 0$ in den geschätzten Koeffizienten realisieren, auch wenn sie im "wahren" Modell gegeben ist.⁴ Rao/Miller (1971, S. 174) empfehlen für diesen Fall, sowohl Modell (23) als auch Modell (12) zu schätzen, die jeweiligen empirischen

⁴ Zur Testproblematik siehe Judge et al. (1985: 321 f.)



Zeitprofile ("impulse response function") zu ermitteln und anhand der Muster, die sie bilden, sich für den einen oder anderen Modelltyp zu entscheiden. Falls das wahre Modell eine geometrische Lag-Struktur beinhaltet, werden die Gleichungen (23) und (12) zu ähnlichen Zeitprofilen führen. Falls das wahre Modell keine geometrische Lag-Struktur für die Beziehung zwischen X und Y aufweist, werden die Schätzer des Modells (12) - zurücktransformiert in die Schätzer des Modells (6), also dessen Antwortfunktion - wegen des ausgelassenen Terms X_{t-1} dennoch eine verteilte Wirkung mit abflachendem Muster nahelegen, während die Schätzer des Modells (23) ab Lag $k=1$ unregelmäßig nahe Null schwanken. Eine allgemeinere Strategie zur Modellidentifikation haben *Box/Jenkins* (1976, Kap. 10) mit ihrer Interpretation des sog. Kreuzkorrelogramms (siehe unten, Abschn. 6) vorgeschlagen.

5. Geometrischer Lag bei zwei Input-Variablen

Bisher haben wir geometrische Lag-Modelle lediglich für eine einzige Input-Variable X spezifiziert. Dieses Modell wollen wir nun um eine zweite Input-Variable Z erweitern, die ebenfalls mit geometrischer Lag-Struktur auf Y wirken soll:

$$(25) \quad Y_t = \alpha + \beta_0(X_t + \delta X_{t-1} + \delta^2 X_{t-2} + \dots) + \gamma_0(Z_t + \lambda Z_{t-1} + \lambda^2 Z_{t-2} + \dots) + \varepsilon_t; \quad 0 < \delta < 1, \quad 0 < \lambda < 1$$

Zur Reduzierung der Parameter muß die Koyck-Transformation - siehe oben Gleichungen (8) bis (12) - jetzt zweimal angewandt werden. Im ersten Schritt wird (25) um ein Intervall zurückversetzt, mit dem Faktor δ multipliziert und anschließend von der Ausgangsgleichung (25) subtrahiert. Dies führt zu

$$(26) \quad Y_t = \alpha(1-\delta) + \delta Y_{t-1} + \beta_0 X_t + \gamma_0[Z_t + (\lambda-\delta)Z_{t-1} + \lambda(\lambda-\delta)Z_{t-2} + \lambda^2(\lambda-\delta)Z_{t-3} + \dots] + \varepsilon_t - \delta\varepsilon_{t-1}$$

Wenn die Koeffizienten δ und λ gleich groß sind, wenn also Y auf die Veränderungen in X mit der gleichen Trägheit wie auf Veränderungen in Z reagiert, entfallen in Gleichung (26) alle verzögerten Z -Terme; sie reduziert sich zu

$$(27) \quad Y_t = \alpha^* + \delta Y_{t-1} + \beta_0 X_t + \gamma_0 Z_t + \varepsilon_t - \delta\varepsilon_{t-1}$$

Dies ist, abgesehen von der Fehlerkomponente, genau das eingangs zitierte Modell (1) von *Stack* (1987), der aber die einschneidende Parameterrestriktion $\delta = \lambda$ überhaupt nicht expliziert und nicht deutet. Es drängt sich natürlich sofort die Frage auf,



wie denn ein Modell aussieht, in dem eine Variable (X) eine geometrisch abfallende Anpassungsreaktion in Y auslöst, die andere Input-Variable (Z) aber nur instantan wirkt. Ein solches Modell läßt sich am leichtesten unter Verwendung des Lag-Operators ableiten, was weiter unten erläutert wird.

Wenn die Restriktion $\delta = \lambda$ in Modell (26) nicht gelten soll, ist eine zweite *Koyck*-Transformation durchzuführen, indem man Gleichung (26) um ein Intervall zurückversetzt, sie sodann mit dem Faktor λ multipliziert und die neu erhaltene Gleichung von der Zwischengleichung (26) subtrahiert. Dies ergibt schließlich

$$(28) \quad Y_t = \alpha(1-\delta)(1-\lambda) + (\delta+\lambda)Y_{t-1} - \delta\lambda Y_{t-2} \\ + \beta_0 X_t - \beta_0 \lambda X_{t-1} + \gamma_0 Z_t - \gamma_0 \delta Z_{t-1} + \eta_t^* , \\ \eta_t^* = \varepsilon_t - (\delta + \lambda)\varepsilon_{t-1} + \delta\lambda\varepsilon_{t-2}$$

Dieses Modell spezifiziert ein geometrisch abfallendes Zeitprofil für die Anpassungsreaktionen von Y auf *beide* Input-Variablen, sieht aber einen unterschiedlich raschen Vollzug der Anpassungsreaktion vor, je nachdem, ob es sich um den X - oder den Z -Input handelt. Die Anpassungsparameter δ und λ sind jedoch mit der Schätzgleichung (28) nicht eindeutig zu bestimmen. Zwar lassen sich aus den Koeffizienten für X_t und X_{t-1} bzw. Z_t und Z_{t-1} Delta- und Lambda-Koeffizienten errechnen; wenn einer von ihnen bestimmt ist, stehen aber auch noch die Koeffizienten der beiden verzögerten Y -Terme zur Berechnung von δ bzw. λ zur Verfügung. Eine numerische Lösung dieses Problems (in einem iterativen Schätzverfahren) ist nur möglich, weil λ und δ nicht nur (beide) bezüglich Y_{t-1} , sondern außerdem λ (ohne δ) bezüglich X_{t-1} und δ (ohne λ) bezüglich Z_{t-1} zu optimieren sind.

Die Gleichungen dynamischer Regressionsmodelle lassen sich viel einfacher manipulieren und interpretieren, wenn sie mit Hilfe des sog. Shift-Operators B geschrieben werden. Da die Fachliteratur zur Zeitreihenanalyse durchgängig diesen Operator (auch "Lag-Operator" genannt) verwendet, sei er hier kurz eingeführt. Er ist wie folgt definiert:



$$(29) \quad B^p Y_t = Y_{t-p}, \quad p=1,2,\dots$$

$$(1-B)Y_t = Y_t - Y_{t-1} \quad ; \quad (1-B)^{-1} = (1+B+B^2+\dots)$$

$$B^0 = 1 \quad ; \quad B^p c = c, \quad c = \text{const.}$$

Mit dem Shift-Operator B kann gemäß den obigen Definitionen wie mit einer algebraischen Größe gerechnet werden, so daß sich das geometrische Lag-Modell (8) wie folgt reformulieren läßt:

$$(30) \quad Y_t = \alpha + \beta_0 [1 + \delta B + (\delta B)^2 + (\delta B)^3 + \dots] X_t + \varepsilon_t$$

$$= \alpha + \beta_0 (1 - \delta B)^{-1} X_t + \varepsilon_t$$

$$= \alpha + \frac{\beta_0}{(1 - \delta B)} X_t + \varepsilon_t$$

$$(1 - \delta B)Y_t = \alpha(1 - \delta) + \beta_0 X_t + (1 - \delta B)\varepsilon_t \quad ,$$

was exakt der Gleichung (11) entspricht. Ein Modell mit geometrischer Lag-Struktur für zwei Input-Variablen kann mit dem Shift-Operator ohne umständliche Ableitungen direkt formuliert werden:

$$(31) \quad Y_t = \alpha + \frac{\beta}{(1-\delta B)} X_t + \frac{\gamma}{(1-\lambda B)} Z_t + \varepsilon_t$$

$$(1-\delta B)(1-\lambda B)Y_t = \alpha^* + (1-\lambda B)\beta X_t + (1-\delta B)\gamma Z_t + (1-\delta B)(1-\lambda B)\varepsilon_t$$

Nach Ausmultiplizieren der Klammerausdrücke erhält man Gleichung (28). Setzt man in Gleichung (31) die Parameter $\delta = \lambda$, so erhält man

$$(32) \quad Y_t = \alpha + \frac{\beta X_t + \gamma Z_t}{(1-\delta B)} + \varepsilon_t$$

$$(1-\delta B)Y_t = \alpha^* + \beta X_t + \gamma Z_t + (1-\delta B)\varepsilon_t$$

Sie entspricht der Gleichung (27). Nun können wir auch leicht ein Modell angeben, das einen geometrischen Lag für eine der beiden Input-Variablen und eine nur instantane Wirkung für die andere spezifiziert:

$$\begin{aligned}
 (33) \quad Y_t &= \alpha + \frac{\beta}{(1-\delta B)} X_t + \gamma Z_t + \varepsilon_t \\
 (1-\delta B)Y_t &= \alpha(1-\delta) + \beta X_t + \gamma Z_t(1-\delta B) + \varepsilon_t(1-\delta B) \\
 Y_t &= \alpha^* + \delta Y_{t-1} + \beta X_t + \gamma Z_t - \gamma \delta Z_{t-1} + \varepsilon_t^*
 \end{aligned}$$

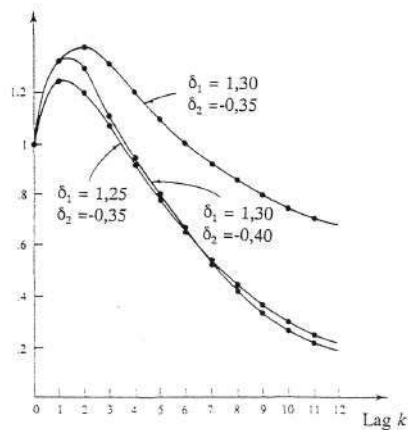
Das ausmultiplizierte Modell (33) unterscheidet sich von Modell (27) durch den gelagten Z-Term, dessen Koeffizient auf den negativen Betrag des Produkts $\lambda\delta$ restringiert ist (vergl. die Diskussion zu Modell (23)).

Bisher haben wir nur geometrische Lag-Strukturen spezifiziert. Man kann diese Modelle aber formal leicht erweitern, indem man zusätzliche verzögerte Terme der endogenen und der exogenen Variablen in die Gleichung mit einbezieht:

$$(34) \quad Y_t - \delta_1 Y_{t-1} - \dots - \delta_r Y_{t-r} = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \dots + \beta_s X_{t-s} + \varepsilon_t$$

Diese allgemeine Modellform bezeichnet man, wie bereits erwähnt, auch als "rational distributed lag model". Mit ihm kann im Prinzip fast jedes beliebige Zeitprofil der Wirkung von X auf Y spezifiziert werden, indem man eine geeignete Menge von Delta- und Beta-Parametern gleich Null bzw. ungleich Null setzt. Abb. 2 zeigt drei Zeitprofile für das Modell $Y_t = \delta_1 Y_{t-1} + \delta_2 Y_{t-2} + \beta X_t + \varepsilon_t$.

Abb. 2: Zeitpfade verschiedener dynamischer Modelle 2. Ordnung:



Quelle: Rao/Miller (1971: 172); modifiziert



Die allgemeine Modellstruktur der Gleichung (34) läßt sich leicht auf zusätzliche Input-Variablen ausdehnen. Üblicherweise benutzt man dazu eine verkürzte Schreibweise, die wir anhand der Gleichung (34) hier einführen. Wenn man den Ordinatenabschnitt $\alpha = 0$ setzt und der Konvention folgt, die Koeffizienten der verzögerten Terme mit einem negativen Vorzeichen zu schreiben, wird aus (34)

$$\begin{aligned}
 (35) \quad Y_t - \delta_1 Y_{t-1} - \dots - \delta_p Y_{t-p} &= \beta_0 X_t - \beta_1 X_{t-1} - \dots - \beta_m X_{t-m} + \varepsilon_t \\
 (1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_p B^p) Y_t &= (\beta_0 - \beta_1 B - \dots - \beta_m B^m) X_t + \varepsilon_t \\
 Y_t &= \frac{\beta_0 - \beta_1 B - \dots - \beta_m B^m}{1 - \delta_1 B - \dots - \delta_p B^p} X_t + \varepsilon_t \\
 Y_t &= \delta^{-1}(B) \beta(B) X_t + \delta^{-1}(B) \varepsilon_t
 \end{aligned}$$

Mit der Kurzform der Lag-Polynome, wie sie die letzte Gleichungszeile einführt, läßt sich nun das allgemeine "rational distributed lag model" für mehrere Input-Variablen in folgender Weise schreiben:

$$(36) \quad Y_t = \frac{\beta^{(1)}(B)}{\delta^{(1)}(B)} X_{1,t} + \frac{\beta^{(2)}(B)}{\delta^{(2)}(B)} X_{2,t} + \dots + \frac{\beta^{(m)}(B)}{\delta^{(m)}(B)} X_{m,t} + \varepsilon_t$$

Das Modell kann darüber hinaus erweitert werden, indem man (a) die Möglichkeit einräumt, daß die (sichtbare) Wirkung einer exogenen Variablen auf Y erst mit einer Verzögerung von $0 \leq b < T$ Intervallen beginnt und (b) außerdem vorsieht, daß der Fehlerterm eine Abhängigkeitsstruktur besitzt, die sich in Form eines ARMA-Modells spezifizieren läßt:

$$\begin{aligned}
 (37) \quad Y_t &= \frac{\beta^{(1)}(B)}{\delta^{(1)}(B)} B^b X_{1,t} + \frac{\beta^{(2)}(B)}{\delta^{(2)}(B)} B^b X_{2,t} + \dots + \frac{\beta^{(m)}(B)}{\delta^{(m)}(B)} B^b X_{m,t} + \varepsilon_t \\
 \varepsilon_t &= \frac{(1 - \theta_1 - \theta_2 - \dots - \theta_q)}{(\phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p)} u_t \\
 Y_t &= \frac{\beta^{(1)}(B)}{\delta^{(1)}(B)} B^b X_{1,t} + \frac{\beta^{(2)}(B)}{\delta^{(2)}(B)} B^b X_{2,t} + \dots + \frac{\beta^{(m)}(B)}{\delta^{(m)}(B)} B^b X_{m,t} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} u_t
 \end{aligned}$$

Solche Modelle lassen sich im Prinzip mit Hilfe der von *Liu/Hanssens* (1982) vorgeschlagenen "corner method" empirisch identifizieren.

Der Gleichgewichtszuwachs G kann für jede X_k -Variable ($k=1,2,\dots,m$) gemäß



$$(38) \quad G = \frac{(\beta_0 - \beta_1 - \dots - \beta_r)}{(1 - \delta_1 - \delta_2 - \dots - \delta_r)}$$

bestimmt werden, wobei die Anzahl s der Beta-Parameter und die Anzahl r der Delta-Parameter für jede Input-Variable unterschiedlich sein kann.

Bei der Identifikation und Schätzung der Modelle sind neben der Stationarität der einzelnen Zeitreihen die Stabilitätsbedingungen des Systems zu beachten. Ein System ist dann stabil, wenn es nach jeder Input-Veränderung dazu tendiert, zu seinem alten oder einem neuen Gleichgewichtsniveau zurückzukehren. Die formale Bedingung hierzu ist, daß die Wurzeln des Polynoms $(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_r B^r)$ alle außerhalb des Einheitskreises liegen müssen. Für ein dynamisches Modell 2. Ordnung läßt sich diese Regel in folgende Ungleichungen übersetzen:

$$\begin{aligned} \delta_1 + \delta_2 &< 1 \\ \delta_2 - \delta_1 &< 1 \\ -1 &< \delta_2 < 1 \end{aligned}$$

In den Beispielen der Abbildung 2 (siehe oben) finden sich nur Parameterkombinationen, die diese Bedingungen erfüllen.

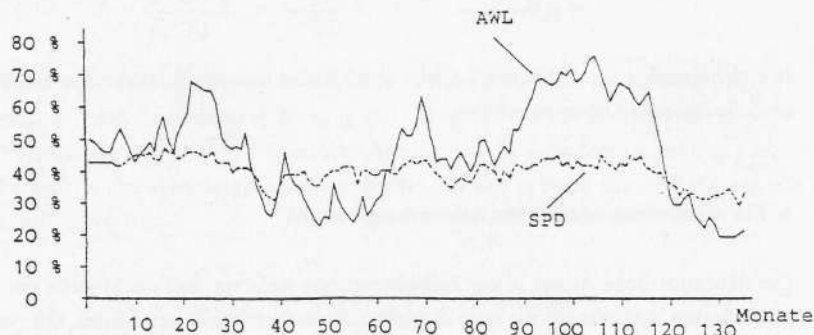
6. Ein sozialwissenschaftliches Anwendungsbeispiel

Der ökonometrische Ansatz in der Zeitreihenanalyse sieht vor, daß die Modelle mit theoretischen Argumenten aus einer Substanzwissenschaft begründet werden. Oft, vor allem in den Sozialwissenschaften, liegen geeignete Theorien aber nicht vor. Der rein statistische Ansatz der Zeitreihenanalyse, wie er prominent von *Box und Jenkins* vertreten wird, hat ein Instrumentarium vorgeschlagen, mit dem die Modelle unter bestimmten Voraussetzungen auf empirische Weise "identifiziert" werden können. Voraussetzungen (vor allem die Stationarität der Reihen) und Instrumentarium können hier nicht im einzelnen erörtert werden. Ich möchte den dreistufigen Vorgang der Identifikation, der Schätzung und der Diagnose eines dynamischen Regressionsmodells ("Transferfunktionsmodells" in der *Box/Jenkins-Terminologie*) lediglich anhand eines Beispiels kurz vorstellen. Ich entnehme es einer Arbeit von *G. Kirchgässner*



(1985 b), dessen Daten ich reanalysiert habe³. Dabei geht es um den Zusammenhang zwischen der Einschätzung der allgemeinen wirtschaftlichen Lage (AWL) und den Parteipräferenzen (Votum für CDU oder für SPD). Die entsprechenden Zeitreihen mit monatlichen Intervallen sind demoskopischen Umfragen entnommen, die von "Infratest" (München) und dem Institut für Demoskopie Allensbach durchgeführt wurden. Sie umfassen die Periode von Februar 1971 bis April 1982 (135 Beobachtungen bzw. linear interpolierte Fälle). Ich benutze hier lediglich die Infratest-Daten zur allgemeinen wirtschaftlichen Lageeinschätzung (Anteil derer, die sie als "gut" oder "sehr gut" ansehen) und zur SPD-Präferenz (Anteil derer, die "am nächsten Sonntag" SPD wählen würden, falls Wahlen stattfänden). Abb. 3 gibt den Verlauf der beiden Zeitreihen wieder.

Abb. 3: Präferenzanteile für die SPD sowie Einschätzung der wirtschaftlichen Lage, Februar 1971 bis April 1982



Sie läßt ausgeprägte lokale Trends erkennen. Nach einfacher Differenzenbildung beider Zeitreihen können die Stationaritätsbedingungen als erfüllt gelten⁶.

⁵ Ich danke Herrn Prof. *Kirchgässner*, der mir diese Zeitreihen mit Genehmigung des Bundespresseamtes zur Verfügung gestellt hat.

⁶ Die Problematik der Differenzenbildung kann ich im Rahmen dieses Papiers nicht behandeln.



Es ist zu vermuten, daß die Einschätzung der wirtschaftlichen Lage einseitig auf die Parteipräferenz wirkt⁷. Damit ist "AWL" als Input-, "SPD" als Output-Reihe festgelegt. Das Instrument für die Identifizierung eines dynamischen Regressionsmodells ("Transferfunktionsmodells") ist die sog. Kreuzkorrelationsfunktion (KKF), die - in Stichprobennotation - wie folgt definiert ist:

$$(39) \quad r_{yx}(k) = \frac{c_{yx}(k)}{s_y s_x} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2 \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}} & , k=0,1,2,\dots \\ \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n+k} (y_t - \bar{y})(x_{t-k} - \bar{x})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2 \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}} & , k=0,-1,-2,\dots \end{cases}$$

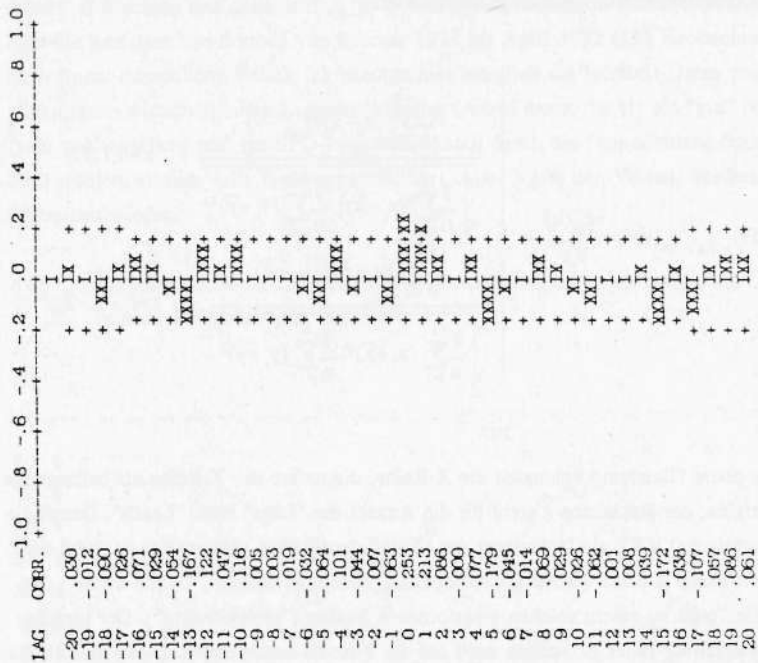
Die obere Gleichung behandelt die X-Reihe, die untere die Y-Reihe als bedingende Variable; der Buchstabe k steht für die Anzahl der "Lags" bzw. "Leads". Damit die (empirische) KKF als Instrument der Modellidentifikation verwendbar ist, muß die Input-Reihe X einen reinen Zufallsprozeß ("weißes Rauschen", "white noise") darstellen oder zu einem solchen transformiert werden ("prewhitening"). Der gleiche *prewhitening-Filter* ist sodann auch auf die Y-Reihe anzuwenden. Diese Schritte kann ich hier nicht darstellen (siehe die Ausführungen in *Box/Jenkins* 1976, Kap. II)⁸. Mit dem Quotienten der (geschätzten) Standardabweichungen der beiden Reihen (s_y/s_x) lassen sich die Kreuzkorrelationskoeffizienten für die verschiedenen Lags $k=0,1,2,\dots$ als nicht-effiziente Schätzer der Koeffizienten β_k in dynamischen Regressionsmodellen gemäß Gleichung (6) interpretieren. Unter günstigen Voraussetzungen (so z. B. muß X einen genügend großen Varianzanteil in Y "erklären") enthüllt somit das Muster der Kreuzkorrelationskoeffizienten den zunächst nicht bekannten Modelltyp der dynamischen Beziehung der beiden Reihen.

⁷ Verfahren, mit denen derartige Hypothesen getestet werden können, stellt *Kirchgässner* (1981) vor; siehe auch die kurze Zusammenfassung in *Thome* (1988).

⁸ Das bereits erwähnte Verfahren von *Liu/Hanssens* (1982) arbeitet ohne diese Form des Prewhitening.

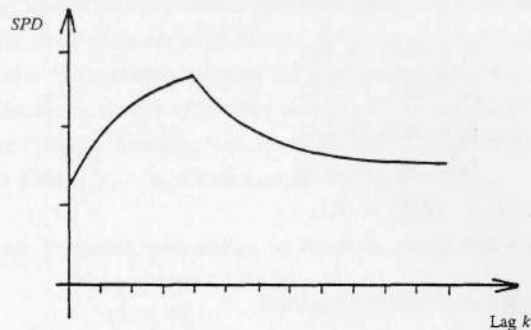
Das Kreuzkorrelogramm (die graphische Darstellung der KKF) der beiden transformierten Reihen in unserem Beispiel ist in Abb. 4 wiedergegeben.

Abb. 4: Kreuzkorrelogramm der transformierten AWL- und SPD-Reihen



Es zeigt einen signifikanten Koeffizienten bei $k=0$ und ein darauf folgendes Muster mit abfallenden Werten. Es läßt sich im Sinne eines dynamischen Modells 1. Ordnung (eines geometrischen Lag-Modells) interpretieren, das oben ausführlich besprochen wurde. Nun tritt aber bei "Lag" $k=-5$ ein weiterer, diesmal negativer Koeffizient auf, der signifikant sein könnte und dem man mit etwas Phantasie ebenfalls ein abfallendes Muster zuordnen kann. Theoretisch ließe sich diese Konstellation im Sinne einer zurückschwingenden Anpassungsreaktion interpretieren: Eine positiv veränderte Einschätzung der ökonomischen Lage kommt zunächst der Regierungspartei SPD zugute. Dieser Effekt wird aber nach einer gewissen Zeit der Gewöhnung, hier nach etwa 4 Monaten, bei einem Teil der (potentiellen) Wähler wieder zurückgenommen. Eine solche Verlaufsform für den Äquilibriumszuwachs läßt sich schematisch wie in Abb. 4 a darstellen.

Abb. 4a: Muster des Zeitpfads der SPD-Reaktion auf einen AWL-Step-Input



Ein solches Modell wird durch folgende Gleichung spezifiziert:

$$(40) \quad \text{Modell A: } \nabla SPD_t = \frac{\beta_0 - \beta_1 B^5}{1 - \delta_1 B} \nabla AWL_t + N_t$$

Alternativ dazu schätzen wir ein weiteres Modell, in dem wir die negative Transferkomponente (also das Zurückschwingen der Anpassungsreaktion) ausschließen:

$$(41) \quad \text{Modell B: } \nabla SPD_t = \frac{\beta_0}{1 - \delta_1 B} \nabla AWL_t + N_t$$

In beiden Gleichungen steht N_t ("Noise") für die Fehlerkomponente, für die ebenfalls ein Modell zu spezifizieren ist, falls eine Abhängigkeitsstruktur der Fehler anzunehmen ist. Ich übernehme hier das von *Kirchgässner* identifizierte *moving-average* Modell 1. Ordnung: $N_t = \theta a_{t-1} + a_t = (1 - \theta B)a_t$. Das Symbol ∇ steht für den (einfachen) Differenzenoperator: $\nabla SPD_t = SPD_t - SPD_{t-1} = (1 - B)SPD_t$. Da sowohl die Input-Reihe (AWL) als auch die Output-Reihe (SPD) in gleicher Weise "differenziert" wurden, bleibt die Interpretation der Modellparameter von dieser Operation unberührt⁹. Im einzelnen werden für die beiden Modelle folgende Parameter geschätzt:

⁹ Dies wird häufig übersehen, das heißt, die Gleichungen

$$(a) Y_t = a + bX_t + e_t$$

$$(b) \nabla Y_t = a^* + b(\nabla X_t) + \nabla e_t$$

werden so interpretiert, als formalisierten sie inhaltlich unterschiedliche Beziehungen.

**Tabelle 4:** Parameterschätzungen und t-Werte für Modell A

$$\delta_1 = .482, t = 4.44$$

$$\beta_0 = .133, t = 5.58$$

$$\beta_3 = .043, t = 2.42$$

$$\theta_1 = .303, t = 3.55$$

$$(RMS = .021)$$

Tabelle 5: Parameterschätzungen und t-Werte für Modell B

$$\delta_1 = .382, t = 3.19$$

$$\omega_0 = .126, t = 4.76$$

$$\theta_1 = .278, t = 3.30$$

$$(RMS = .022)$$

Die Koeffizienten beider Modelle sind statistisch signifikant und liegen innerhalb der Stationaritätsregionen. Auch die Interkorrelationen der Parameter (hier nicht abgedruckt) sind in beiden Fällen zufriedenstellend. Die *t*-Werte lassen erkennen, daß die Parameterschätzungen für Modell A etwas stabiler sind als diejenigen für Modell B. Die RMS-Werte differieren aber nur geringfügig. Sie sind beide erheblich geringer als die RMS=0.166 für das univariate SPD-Modell.

Die Frage ist, ob sich empirisch anhand weiterer Diagnose-Kriterien entscheiden läßt, welches der beiden Modelle, A oder B, den beobachteten Daten eher entspricht. Die übliche Residuenanalyse (hier nicht dokumentiert) weist beide Modelle als akzeptabel aus mit

Der Steigungsparameter "b" besagt jedoch in beiden Gleichungen dasselbe. Das wird deutlich, wenn man von Gleichung (a) die inhaltsgleiche Beziehung

$$(a^*) Y_{t-1} = a + bX_{t-1} + e_{t-1}$$

subtrahiert. Es resultiert die Gleichung (b) mit unverändertem Steigungskoeffizienten *b*. Allerdings stellt (b) eine andere Schätzgleichung als (a) dar; es verändert sich nicht nur der Ordinatenabschnitt (er wird gleich Null), sondern es verändert sich auch die Autokorrelation der Fehler. Außerdem ist darauf zu achten, daß die beiden Reihen nicht "überdifferenziert" werden (siehe *Gottman* 1981: 260 ff.)

leichten Vorteilen für Modell A. Der zweite entscheidende Test für die Güte der (vorläufig) identifizierten Transferfunktionsmodelle wird in der Forschungspraxis häufig ausgelassen: Die Kreuzkorrelationsfunktion zwischen den Residuen und der "vorgeweißten" Input-Reihe darf keinerlei Hinweise auf eine strukturelle Beziehung enthalten; die Abfolge der Kreuzkorrelationskoeffizienten über eine Serie von "Lags" sollte einem reinen Zufallsprozeß ("weißes Rauschen") entsprechen. Abb. 5 zeigt das entsprechende Kreuzkorrelogramm für Modell A, Abb. 6 dasjenige für Modell B.

Abb. 5: Kreuzkorrelogramm der Residuen aus Modell A mit dem "vorgeweißten" AWL-Input

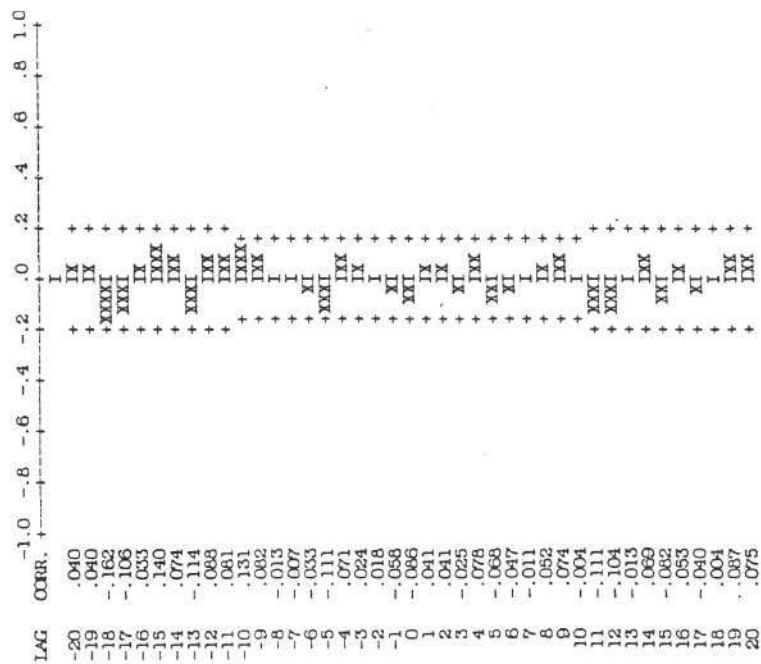
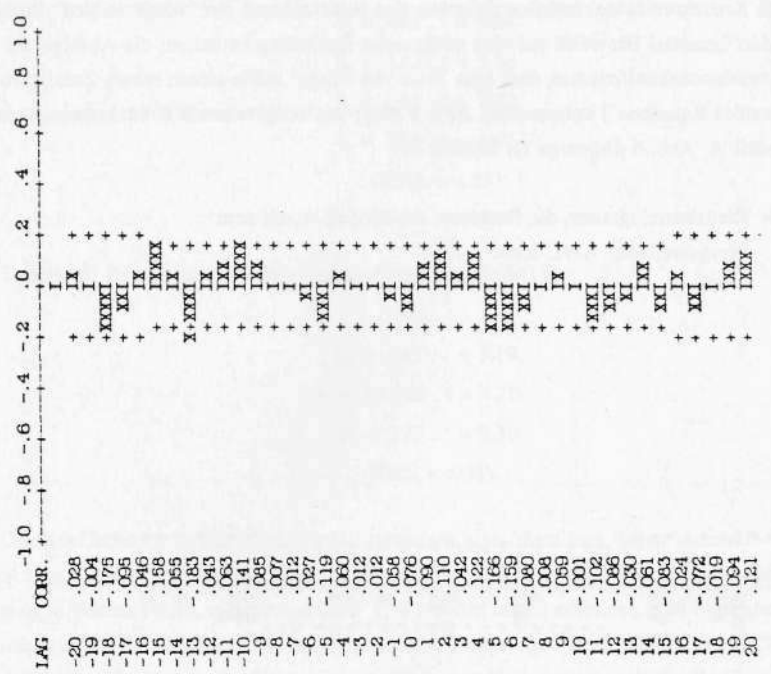


Abb. 6: Kreuzkorrelogramm der Residuen aus Modell B mit dem "vorgeweißten" AWL-Input



In Abb. 7 sind keinerlei signifikante Koeffizienten zu erkennen. Auch wenn wir nicht nur einzelne Koeffizienten, sondern Gruppen von Koeffizienten testen, ist keine statistische Signifikanz feststellbar: Analog zur *Ljung-Box* Statistik für die Autokorrelationsfunktion univariater Zeitreihen (Test auf "white noise") ist auch ein Portmanteau-Test für die KKF des "vorgeweißten" Inputs mit den Residuen des Gesamtmodells definiert:

$$(42) \quad Q(K) = m(m+2) \sum_{k=0}^K \frac{1}{m-k} r_{ar}^2(k)$$

Dabei steht a für die vorgeweißte Input-Reihe, e für die Residuen des Transferfunktionsmodells; m bezeichnet die Anzahl der verwertbaren Elemente der Residualreihe. Sie ist $n-d-w-p$. Dabei entspricht n der ursprünglichen Zahl von Meßzeitpunkten, p der Zahl der autoregressiven Parameter im Noise-Modell (hier $p=0$), d gibt den Wiederholungsfaktor (den "Grad") der Differenzenbildung an (hier $d=1$), und w ist gleich r oder gleich $s+b$, je nachdem, welcher Betrag größer ist. In unserem Beispiel ist für Modell A $s = 5$ größer als

$r = 1$. Somit erhalten wir $m = 135 - 1 - 5 = 129$ effektive Fälle.¹⁰ Klein k indiziert den jeweiligen Lag, groß K die Menge der insgesamt betrachteten Lags (Lagspanne). Die Testgröße Q ist χ^2 -verteilt; die Freiheitsgrade sind mit $df = K + 1$ - (Zahl der gefitteten δ - und β -Parameter) zu berechnen.

Somit ergeben sich für verschiedene Lag-Spannen die Signifikanzwerte der Tabelle 6.

Tabelle 6: Q-Statistik für die Residuen aus Modell A mit dem vorgeweißten Input

| Lag k | Q | α |
|-------|------|----------|
| 3 | 1.33 | 0.25 |
| 6 | 2.34 | 0.68 |
| 12 | 6.83 | 0.74 |

Die Nullhypothese (kein Zusammenhang) kann also beibehalten werden; Modell A ist nach diesem Kriterium akzeptabel.

Anders sieht das Kreuzkorrelogramm für Modell B (Abb. 6) aus. Es zeigt eine deutliche Musterung im positiven Lag-Bereich und dort auch signifikante Koeffizienten bei Lag $k=5$ und $k=6$. Die Q-Statistik legt ebenfalls eine Ablehnung der Nullhypothese nahe, wenn man bedenkt, daß es hier vor allem um einen möglichst geringen *Beta-Fehler*, also um einen relativ hohen *Alpha-Wert* geht (siehe Tab. 7).

Tabelle 7: Q-Statistik für die Residuen aus Model B mit dem vorgeweißten Input

| Lag k | Q | α |
|-------|-------|----------|
| 3 | 3.67 | 0.06 |
| 6 | 12.90 | 0.01 |
| 12 | 16.85 | 0.07 |

¹⁰ Ich habe hier keine Korrektur für die mir unbekannt Zahl der linear interpolierten Fälle vorgenommen.

Damit zeigt sich, daß in Modell B die Transferfunktion **nicht** adäquat spezifiziert worden ist. Modell A schneidet bei der Diagnose eindeutig besser ab.

Wie ist nun das Schätzergebnis für Modell A zu interpretieren? Sowohl die Input-Variable (AWL) als auch die Output-Variable (SPD) sind als Prozentanteile befragter Personengruppen gebildet worden. Da beide Variablen mit dem gleichen Differenzenfilter transformiert wurden, gelten die Parameter auch für die ursprünglichen Skalenwerte (Prozentgrößen) der beiden Reihen. $\beta_0 = 0.133$ besagt: wenn der Prozentanteil von Personen, die die wirtschaftliche Lage als gut oder sehr gut einschätzen um 10 Prozentpunkte ansteigt, wächst innerhalb des gleichen Monats der Anteil der SPD-Präferenzen um 1.3 Prozentpunkte. Die Reaktion auf eine **anhaltende** Niveauverschiebung in AWL setzt sich bis nach dem vierten Monat fort. Die SPD-Präferenzen erreichen bis dahin eine Zuwachsgröße, die 24 % des Niveauanstiegs in AWL entspricht.

$$(43) \quad y_4 = \beta_0(1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \delta^4) \\ = \beta_0 \frac{1 - \delta^4}{1 - \delta} = 0,133 \frac{1 - 0,482^4}{1 - 0,482} = 0,24$$

Das heißt, ungefähr ein Viertel derjenigen Personen, die ihre Einschätzung der wirtschaftlichen Lage im angegebenen Sinne ändern, ändern zunächst (innerhalb von vier Monaten) auch ihre Parteipräferenz für oder gegen die SPD. Wenn der mit β_5 indizierte Gegeneffekt nicht einträte, ließe sich langfristig ein Äquilibriumszuwachs von

$$(44) \quad G = \frac{0,133}{1 - 0,482} = 0,26$$

ermitteln. Doch mit dem fünften Monat setzt ein Abschwungeffekt ein: einige Leute korrigieren ihre Präferenzänderung, so daß ab $t=5$ positive und negative Zuwachsbeträge addiert werden müssen. Für $t=5$ ergibt sich ein positives Inkrement von $\beta_5 \delta^5 = 0.035$ und ein negatives von $\beta_5 = 0.043$: Nach $t=4$ beginnt die Zuwachskurve also zu fallen. Langfristig nähert sie sich einem Äquilibriumszuwachs von

$$(45) \quad G = \frac{0,133 - (0,043)}{1 - 0,482} = 0,17$$

(vergl. Abb. 4 a). Das heißt, von 100 Personen, die ihre Einschätzung der wirtschaftlichen Lage "dauerhaft" ändern, ändern vorübergehend 26 und schließlich 17 dauerhaft auch ihre



Präferenz für oder gegen die SPD.¹¹ *Kirchgässner* (1985) hat die gleiche Analyse auch für die CDU-Präferenzen durchgeführt und dabei ein fast spiegelbildliches Ergebnis erhalten: Die Zahl derjenigen Personen, die aufgrund einer veränderten Einschätzung der wirtschaftlichen Lage ihre Präferenz von der SPD abziehen, ist nahezu identisch mit der Zahl der Personen, die gleichzeitig zur CDU wandern.

Daß Identifikation und Schätzung eines Transferfunktionsmodells in diesem sozialwissenschaftlichen Beispiel relativ glatt vonstatten ging, ist vor allem dem Umstand zu verdanken, daß zwischen den beiden Variablen AWL und SPD tatsächlich ein starker Zusammenhang besteht. Die Modellidentifikation gelingt nämlich nur, wenn die Varianz der Input-Reihe im Vergleich zu der Varianz der Output-Werte, die durch das "Noise" erzeugt wird, relativ groß ist oder/und eine große Menge von Meßzeitpunkten vorliegt (s. *Box/Jenkins* 1976, S. 387; vergl. *Downing/Pack* 1982, S. 235). Diese Voraussetzungen sind in den Sozialwissenschaften oft nicht erfüllt. Die Problemlage wird durch das Pre-whitening verschärft, weil durch diese Datentransformation unter Umständen der Anteil der Meßfehler an der Gesamtvarianz erhöht wird (siehe *Kirchgässner* 1981). Zusätzliche Probleme können entstehen, wenn Daten vorliegen, die bereits in irgendeiner Weise mit Verfahren außerhalb der *Box/Jenkins-Methode* transformiert wurden. Die Daten können z. B. vorgängig saisonal bereinigt worden sein. Häufig führt das zu einer Verzerrung des strukturellen Zusammenhangs der beiden Variablen.

7. Zusammenfassung

In Regressionsanalysen mit Querschnittsdaten können die geschätzten Modellparameter nur dann sinnvoll als Indikatoren kausaler Beziehungen interpretiert werden, wenn sich die Daten zum Zeitpunkt der Messung (näherungsweise) in einem Gleichgewichtszustand befinden. Zeitreihendaten und die Methoden der Zeitreihenanalyse eröffnen im Prinzip die Möglichkeit, diese restriktive, oft unrealistische Voraussetzung fallenzulassen und den "Zeitpfad" der Wirkung einer Variablen X auf eine Variable Y zu rekonstruieren. Wie dies geschieht, wurde hier ausführlich am Beispiel des geometrischen Lag-Modells erörtert. Solche "dynamischen" Modelle können im Idealfall aus einer substanzwissenschaftlichen Theorie abgeleitet werden; andererseits stellt die Zeitreihenanalyse auch Instrumente bereit, mit denen bestimmte Modellkomponenten empirisch ("aus den Daten heraus") identifiziert werden können - eine Möglichkeit, die der "*Box/Jenkins*"-Ansatz in besonderer Weise

¹¹ Nach den Schätzergebnissen von *Kirchgässner* sind es 15 Personen.

betont. Aber auch die empirische Modellidentifikation (die hier an einem Beispiel demonstriert wurde) kommt ohne theoretische Vorgaben nicht aus. Der Forscher muß zumindest eine Vorstellung darüber haben, welche Variablen in einer strukturellen Beziehung zueinander stehen könnten. Das empirisch spezifizierte Noise-Modell beispielsweise löst nicht das Problem der "omitted variables", das aus der Regressionsanalyse mit Querschnittsdaten bekannt ist. Es löst nur das Problem autokorrelierter Fehler, nicht das der ausgelassenen Variablen, die mit den im Modell berücksichtigten Input-Reihen korrelieren.

Wie andere formale Modelle auch, sollen dynamische Regressionsmodelle inhaltliche Theorien präzisieren und den (zweigleisigen) Transfer zwischen Theorie und Daten erleichtern. In diesem Artikel sind nur einfache Modelle mit lediglich einer abhängigen Variablen vorgestellt worden. Bezogen auf sozialwissenschaftliche Theorien sind sie häufig nicht komplex genug. Wie schon in der Querschnittsanalyse, so ist auch in der Zeitreihenanalyse in diesen Fällen von Ein- auf (simultane) Mehrgleichungsmodelle überzugehen. Sie eröffnen insbesondere die Möglichkeit, Kausalketten und Wechselwirkungen zwischen Variablen zu spezifizieren. Derartige Modelle sowie die entsprechenden Verfahrenstechniken und geeignete Software sind sowohl in der ökonometrischen Tradition als auch innerhalb des *Box/Jenkins-Ansatzes* entwickelt, bisher aber in der Soziologie kaum erprobt worden.

Literaturverzeichnis

- Box, G. E. P./Jenkins, G. M.*, 1976: Time series analysis. Forecasting and control, San Francisco u. a.: Holden-Day (revised edition).
- Cohen, L. E./Land, K. C.*, 1987: Age structure and crime: symmetry versus asymmetry and the projection of crime rates through the 1990s.
- Devine, J. A./Sheley, J. F./Smith, M. D.*, 1988: Macroeconomic and social-control policy influences on crime rate changes, 1948 - 1985. *American Sociological Review* 53: 407 - 420.
- Dhrymes, Ph. J.*, 1971: Distributed lags. Problems of estimation and formulation, San Francisco: Holden-Day und Edinburgh: Oliver & Boyd.
- Downing, D. J./Pack, D. J.*, 1982: The vanishing transfer function, S. 227 - 246 in: O. D. Anderson (Hrsg.), *Time series analysis: Theory and practice 1*, Amsterdam: North Holland.
- Gottman, J.M.*, 1981: Time-series analysis. A comprehensive introduction for social scientists, Cambridge u. a.: Cambridge University Press.



- Hibbs, D. A.*, 1974: Problems of statistical estimation and causal inference in time-series regression models, S. 252 - 308, in: H. L. Costner (Hrsg.), *Sociological methodology 1973-1974*, San Francisco u.a.: Jossey-Bass.
- Johnston, J.*, 1972: *Econometric methods*, New York u. a.: McGraw-Hill (2nd edition).
- Judge, G. G./Griffiths, W. E./Hill, R. C./Lee, T.-C.*, 1980: *The theory and practice of econometrics*, New York u. a.: Wiley (Neuaufgabe 1985).
- Kirchgässner, G.*, 1981: *Einige neuere Verfahren zur Erfassung kausaler Beziehungen zwischen Zeitreihen*, Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht.
- Kirchgässner, G.*, 1985 a: Überprüfung der Hypothese rationaler Erwartungen anhand von Popularitätsdaten. Eine Untersuchung für die Bundesrepublik Deutschland, 1971 - 1982. Vortrag vor dem ökonomischen Ausschuss des Vereins für Sozialpolitik, Rauschholzhausen, 21. 3. 1985, vorläufige Fassung.
- Kirchgässner, G.*, 1985 b: Causality testing of the popularity function. An empirical investigation for the Federal Republic of Germany, 1971-1982. *Public Choice* 45: 155 - 173.
- Kirchgässner, G.*, 1986: Economic conditions and the popularity of West German parties: A survey. *European Journal of Political Research* 14: 421 - 439.
- Kmenta, J.*, 1986: *Elements of econometrics*, New York u. London: Macmillan (2nd edition).
- Liu, L.-M./Hanssens, D. M.*, 1982: Identification of multiple-input transfer function models. *Communications in Statistics A* 11: 297 - 314.
- Norpoth, H.*, 1984: Economics, politics, and the cycle of presidential popularity. *Political Behavior* 6: 253 - 273.
- Rao, P./Miller, R. L.*, 1971: *Applied Econometrics*, Belmont: Wadsworth.
- Stack, St.*, 1987: Publicized executions and homicide, 1950 - 1980. *American Sociological Review* 52 (1987): 532 - 540.
- Thome, H.*, 1988: Probleme des Identifizierens und Testens von Kausalbeziehungen in der statistischen Zeitreihenanalyse, S. 93 - 117 in: F. Meier (Hrsg.), *Prozeßforschung in den Sozialwissenschaften*, Stuttgart: G. Fischer.