

## Ausreißer und fehlende Werte in der Zeitreihenanalyse: ihre Modellierung im Rahmen des Box/Jenkins-Ansatzes

Thome, Helmut

Veröffentlichungsversion / Published Version

Zeitschriftenartikel / journal article

**Zur Verfügung gestellt in Kooperation mit / provided in cooperation with:**

GESIS - Leibniz-Institut für Sozialwissenschaften

### Empfohlene Zitierung / Suggested Citation:

Thome, H. (1992). Ausreißer und fehlende Werte in der Zeitreihenanalyse: ihre Modellierung im Rahmen des Box/Jenkins-Ansatzes. *ZA-Information / Zentralarchiv für Empirische Sozialforschung*, 31, 37-69. <https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0168-ssoar-202351>

### Nutzungsbedingungen:

*Dieser Text wird unter einer Deposit-Lizenz (Keine Weiterverbreitung - keine Bearbeitung) zur Verfügung gestellt. Gewährt wird ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht-kommerziellen Gebrauch bestimmt. Auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments müssen alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten werden. Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgendeiner Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen.*

*Mit der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.*

### Terms of use:

*This document is made available under Deposit Licence (No Redistribution - no modifications). We grant a non-exclusive, non-transferable, individual and limited right to using this document. This document is solely intended for your personal, non-commercial use. All of the copies of this documents must retain all copyright information and other information regarding legal protection. You are not allowed to alter this document in any way, to copy it for public or commercial purposes, to exhibit the document in public, to perform, distribute or otherwise use the document in public.*

*By using this particular document, you accept the above-stated conditions of use.*

## Ausreißer und fehlende Werte in der Zeitreihenanalyse: Ihre Modellierung im Rahmen des Box/Jenkins-Ansatzes<sup>1</sup>

Von Helmut Thome

### Zusammenfassung

*Modelle und Verfahren der statistischen Zeitreihenanalyse sind bisher in der Soziologie nur selten angewandt worden. Das liegt u. a. daran, daß die vorliegenden Zeitreihendaten oft nicht die Voraussetzungen erfüllen, die in die Konstruktion der statistischen Modelle eingegangen sind. Ausreißer und fehlende Werte sind häufig Teil des Problems. Sie begünstigen Fehlspezifikationen und verzerrte Parameterschätzungen. Im Rahmen des Box/Jenkins-Ansatzes ist inzwischen ein Verfahren entwickelt worden, das es ermöglicht, Ausreißer und fehlende Werte gemeinsam mit den Modellparametern iterativ zu schätzen. Da inzwischen auch die entsprechende Software zur Verfügung steht, dürfte es Anwendungen zeitreihenanalytischer Verfahren in den Sozialwissenschaften erheblich verbessern.*

### Abstract

*Statistical methods of time series analysis have as yet rarely been applied within sociological research. This is partly to be explained by the fact that available time series data frequently do not meet assumptions that are constitutive for the statistical models considered for application. Outliers and missing values are often part of the problem. They tend to produce misspecifications and biased estimation of model parameters. Recently, an iterative method for jointly estimating outliers and missing values together with the model parameters has been developed within the framework of Box and Jenkins. Cast in comfortable software language, this procedure promises to improve considerably the praxis of time series analysis within the social sciences.*

Verfahren der Zeitreihenanalyse werden in der soziologischen Forschungspraxis bisher nur selten angewandt. Das liegt u. a. daran, daß in vielen Arbeitsbereichen geeignete Zeitreihen nicht vorliegen. Die gängigen Analysemodelle setzen eine große Zahl gleich-

---

<sup>1</sup> Erweiterte Fassung eines Vortrags bei der International Conference on Social Science Methodology (ISA, RC 33), Trento, Italien, 22. -26. Juni 1992.

abständiger Messungen (Daumenregel:  $n \geq 50$ ) am gleichen Objekt voraus und interpretieren die Meßergebnisse als Realisationen eines stationären stochastischen Prozesses. Lange Zeitreihen sind aber häufig weder in ihrem Erwartungswert noch in ihrer Varianz/Kovarianzstruktur stationär; nicht selten weisen sie Strukturbrüche auf, die nicht durch einfache Datentransformationen beseitigt werden können. Eine relativ milde Form von Diskontinuitäten, die in der Praxis aber ebenfalls erhebliche Probleme bereitet, sind Ausreißer und fehlende Werte. Sie können (a) die empirischen Autokorrelationsfunktionen verzerren und dadurch inadäquate Modellspezifikationen (eine Über- ebenso wie eine Unterparametrisierung) herbeiführen (Tsay 1986: 133), (b) auch bei korrekter Modellspezifikation die Parameterschätzungen verzerren, was sich nicht nur (c) negativ auf die Prognosegüte des Modells auswirkt, sondern auch dazu führen kann, daß (d) der Einfluß exogener Variablen fehlerhaft modelliert und geschätzt wird. Neben den traditionellen Ad-hoc-Methoden (z. B. Ersetzen des Ausreißers durch den Mittelwert der Reihe), robusten Schätzmethoden und Kalman-Filter-Ansatz (s. Schlittgen 1990) sind inzwischen auch im Rahmen des Box/Jenkins-Ansatzes Modellierungsstrategien entwickelt worden, die hier in der von Chen/Liu (1990) ausgearbeiteten Fassung vorgestellt werden sollen.

In Abschnitt 1 werden einige Elemente des Box/Jenkins-Ansatzes eingeführt, die bei der Modellierung von Ausreißereffekten und fehlenden Beobachtungen benötigt werden; der 2. Abschnitt stellt vier Ausreißer-Modelle vor; Abschnitt 3 zeigt, wie sich die verschiedenen Ausreißer-Typen in den Modellresiduen niederschlagen; Abschnitt 4 erläutert einen regressionsanalytischen Ansatz zur Schätzung der Ausreißereffekte; Abschnitt 5 präsentiert ein iteratives Verfahren, mit dem die Effekte multipler Ausreißer und die Modellparameter der Zeitreihe gemeinsam geschätzt werden können; Abschnitt 6 zeigt, wie mit Hilfe dieses Verfahrens fehlende Werte zu interpolieren sind; Abschnitt 7 präsentiert Anwendungsbeispiele mit simulierten und "realen" Daten; ihm folgt im letzten Abschnitt eine kurze Zusammenfassung und Diskussion.

### 1. ARMA- und Transferfunktionsmodelle: Notationen

Es ist natürlich nicht möglich, in einem Papier, das ein Spezialproblem der Modellierung von Zeitreihen behandeln soll, eine allgemeine Einführung in die Zeitreihenanalyse bzw. den Box/Jenkins-Ansatz zu geben.<sup>2</sup> Dieser Abschnitt dient lediglich dazu, einige Formalismen und Notationen vorzustellen, die bei der Modellierung von Ausreißern und fehlenden Werten benötigt werden.

---

<sup>2</sup> Siehe hierzu grundlegend Box/Jenkins (1976). Zu den zahlreichen Einführungstexten gehören McCleary/Hay (1980), Schmitz (1989), Vandaele (1983).

Zeitreihen lassen sich in vielen Fällen als Realisationen schwach-stationärer Prozesse auffassen, die "sparsam" mit Hilfe einer Kombination von autoregressiven und "moving-average" Komponenten dargestellt werden können - die sog. ARMA(p,q)-Modelle:

$$(1) Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \dots - \phi_p Y_{t-p} = c + a_t - \theta a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

$\{Y_t\}$  mit  $t=1,2,\dots,n$  bezeichnet eine Zeitreihe, die nicht durch Ausreißer kontaminiert ist;  $c$  sei eine Konstante und  $\{a_t\}$  eine Folge von Zufallsgrößen ("random shocks"), die identisch und unabhängig voneinander normalverteilt sind mit dem Erwartungswert  $E(a_t)=0$  und der Varianz  $var(a_t)=\sigma^2$ . Wenn alle Theta-Gewichte, nicht aber alle Phi-Gewichte in (1) gleich Null gesetzt sind, handelt es sich um einen autoregressiven Prozeß p-ter Ordnung: AR(p) oder ARMA(p,0); falls alle Phi-Gewichte, nicht aber alle Theta-Gewichte gleich Null gesetzt sind, handelt es sich um einen "moving-average" Prozeß q-ter Ordnung: MA(q) oder ARMA(0,q); wenn sämtliche Phi- und Theta-Gewichte gleich Null sind, spricht man von "weißem Rauschen" oder einem "white-noise" Prozeß. Im allgemeinen versucht man, aus der empirischen Autokorrelationsfunktion (und anderen Musterfunktionen) die p- und q-Parameter, also die Anzahl der benötigten Phi- und Theta-Gewichte zu bestimmen ("Modellidentifikation"), sie mit einem geeigneten Verfahren zu schätzen und das geschätzte Modell anhand bestimmter Kriterien auf seine Adäquanz zu prüfen ("Modelldiagnose").

Gleichung (1) läßt sich mathematisch leichter handhaben, wenn der "Backshift"-Operator  $B$  (oder "Lag"-Operator  $L$ ) eingeführt wird, der wie folgt definiert ist:

$$(2) B^m Y_t = Y_{t-m}, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$B^0 = 1$$

$$Bc = c, \quad c = const.$$

Aus der Algebra des Backshift-Operators läßt sich auch der folgende Summationsoperator ableiten:

$$(3) (1 - B)^{-1} = (1 + B + B^2 + \dots) = \sum_{j=0}^{\infty} B^j$$

$$(1 - \alpha B)^{-1} = (1 + \alpha B + \alpha^2 B^2 + \dots) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j B^j$$

Gleichung (1) kann nun wie folgt geschrieben werden:

$$(4) (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) Y_t = c + (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t$$

Es ist üblich, die Lag-Polynome in Kürzeln auszudrücken:

$$(5) \quad (1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B^p) = \varphi(B)$$

$$(1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) = \theta(B)$$

Wenn wir außerdem, um die Darstellung zu vereinfachen, die Konstante  $c$  gleich Null setzen, wird aus Gleichung (4)

$$(6) \quad Y_t = \frac{\theta(B)}{\varphi(B)} a_t$$

Indem man  $B$  wie eine algebraische Größe behandelt, lassen sich die Nullstellen ("Wurzeln") der Lag-Polynome berechnen, die Informationen über wichtige Prozeßcharakteristiken enthalten. Wenn die Nullstellen des AR-Polynoms alle außerhalb des Einheitskreises liegen, ist der Prozeß schwach stationär, d. h., der Erwartungswert  $E(Y_t) = \mu$  sowie die Varianz  $var(Y_t)$  sind konstant für alle  $t=1,2,\dots,n$  und die Auto-Kovarianzen  $cov(Y_t, Y_{t-k})$  hängen nur vom Lag  $k$  ( $1 \leq k < n$ ), nicht aber vom Zeitpunkt  $t$  ab. MA-Prozesse sind stets stationär; dennoch wird auch hier verlangt, daß die Nullstellen des Polynoms  $\theta(B)$  außerhalb des Einheitskreises liegen, um die sog. Invertibilität des Prozesses zu gewährleisten. Diese Eigenschaft wird benötigt, um MA-Prozesse in AR-Prozesse "übersetzen" zu können (siehe unten) und um eine eindeutige Zuordnung von Prozeßstruktur und Autokorrelationsfunktion sicherzustellen.

Das Modell (6) kann um bestimmte nicht-stationäre Prozeßelemente (wie Trends und Zyklen) erweitert werden, sofern sie sich durch Lag-Polynome darstellen lassen, deren Nullstellen nicht innerhalb oder außerhalb, sondern exakt auf dem Einheitskreis liegen (homogene Nicht-Stationariät). Diese Erweiterung führt zu den sog. ARIMA bzw. ARU-MA-Modellen (siehe *Box/Jenkins* 1976: 85 ff.; *Schlütgen/Streüberg* 1984: 202 ff.; *Tiao* 1985: 86). Die Auswirkungen von Ausreißern für nicht-stationäre Modelle abzuleiten, ist im allgemeinen mathematisch schwieriger als im Falle der stationären Modelle. Da aber die Verfahren der Identifikation und der Schätzung von Ausreißereffekten für stationäre und für homogen nicht-stationäre Prozesse gleich sind, beschränke ich mich hier auf die Darstellung der stationären Modelle. (In Abschnitt 7 wird aber auch ein nicht-stationäres Saison-Modell kurz vorgestellt.)

Stationäre und invertible ARMA-Modelle lassen sich äquivalent in einen unendlichen MA-Prozeß (die sog. Psi-Gewichte-Form) oder einen unendlichen AR-Prozeß (die sog. Pi-Gewichte-Form) übersetzen (siehe *Box/Jenkins* 1976: 47 ff.):

$$\begin{aligned}
 (7a) \quad Y_t - \mu &= a + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots \\
 &= (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) a_t \\
 &= \psi(B) a_t, \quad \psi(B) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j B^j = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j, \quad \psi_0 = 1
 \end{aligned}$$

Die  $\{Y_t - \mu\}$  repräsentieren die Abweichungen des stationären Prozesses von seinem mittleren Niveau. Im Unterschied zu den (endlich vielen) Theta-Gewichten in Gleichung (4) schreiben *Box* und *Jenkins* die (unendlich vielen) Psi-Gewichte mit positivem Vorzeichen.<sup>3</sup> Dagegen werden die Pi-Gewichte innerhalb der Polynomform mit negativem Vorzeichen geschrieben:

$$\begin{aligned}
 (7b) \quad Y_t - \mu &= a_t + \pi_1 Y_{t-1} + \pi_2 Y_{t-2} + \dots \\
 Y_t - \pi_1 Y_{t-1} - \pi_2 Y_{t-2} - \dots &= a_t + \mu \\
 (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) Y_t &= a_t + \mu \\
 \pi(B) Y_t &= a_t + \mu
 \end{aligned}$$

Da wir die Gleichungen (7a) und (7b) bei der Erläuterung der Ausreißermodellierung benötigen<sup>4</sup>, seien sie kurz am Beispiel eines ARMA(1,0)-Prozesses mit  $\mu = 0$  veranschaulicht:

$$\begin{aligned}
 (8) \quad Y_t &= \phi Y_{t-1} + a_t \\
 Y_{t-1} &= \phi Y_{t-2} + a_{t-1} \\
 Y_{t-2} &= \phi Y_{t-3} + a_{t-2} \\
 Y_t &= \phi(\phi Y_{t-2}) + \phi a_{t-1} + a_t \\
 &= \phi^2[\phi Y_{t-3} + a_{t-2}] + \phi a_{t-1} + a_t \\
 &= \phi^3 Y_{t-3} + \phi^2 a_{t-2} + \phi a_{t-1} + a_t
 \end{aligned}$$

Durch fortgesetzte Substitution der  $Y_{t-k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) erhält man unter der Stationaritätsbedingung  $|\phi| < 1$  die Gleichungsform (7a) mit  $\psi_k = \phi^k$ .

Unter Verwendung des Lag- und des Summationsoperators der Gleichungen (2) und (3) läßt sich der in (8) dargestellte Übersetzungsprozeß wie folgt abkürzen:

<sup>3</sup> Nicht alle Autoren und Computer-Programme folgen dieser Vorzeichen-Konvention.

<sup>4</sup> Man kann die folgenden Ableitungen bis Gleichung (13) zunächst überlesen und zu ihnen zurückkehren, wenn man in Abschnitt 4 die Konstruktion der Schätzmodelle besser verstehen will.

$$(9) \quad (1 - \varphi B)Y_t = a_t \\ Y_t = (1 - \varphi B)^{-1}a_t \\ = (1 + \varphi B + \varphi^2 B^2 + \dots)a_t$$

Analog erhalten wir für einen ARMA(0,1)-Prozeß

$$(10) \quad Y_t = (1 - \theta B)a_t \\ (1 - \theta B)^{-1}Y_t = a_t \\ (1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \dots)Y_t = a_t, \quad \theta^k = -\pi_k, \quad k=0,1,2,\dots$$

Für einen ARMA(p,q)-Prozeß gilt allgemein:

$$(11) \quad Y_t = \frac{\theta(B)}{\varphi(B)}a_t \\ = \psi(B)a_t, \quad \psi(B) = \frac{\theta(B)}{\varphi(B)} \Rightarrow \psi(B)\varphi(B) = \theta(B) \\ \frac{\varphi(B)}{\theta(B)}Y_t = a_t \\ \pi(B)Y_t = a_t, \quad \pi(B) = \frac{\varphi(B)}{\theta(B)} \Rightarrow \pi(B)\theta(B) = \varphi(B)$$

Die Gewichteschemata ("Filter")  $\pi(B)$  und  $\psi(B)$  sind also invers zueinander. Mathematisch werden die Pi- und Psi-Gewichte mit der Methode des Koeffizientenvergleichs gewonnen, indem man die Polynome ausmultipliziert und die Koeffizienten gleicher B-Potenzen auf beiden Seiten der entsprechenden Gleichung gleichsetzt. Die Standardsoftware zur Zeitreihenanalyse bietet in der Regel die Möglichkeit, die Pi- und Psi-Gewichte mit einer vorprogrammierten Routine auszurechnen.

Die ARMA-Modelle lassen sich erweitern, indem man nicht nur die random shocks  $\{a_t\}$ , sondern zusätzlich eine oder mehrere exogene Variablen  $\{X_t\}$  als Input-Größen berücksichtigt, die mit dem Output  $\{Y_t\}$  über analoge Transferfunktionen verknüpft sind:

$$(12) \quad Y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)}X_t + \frac{\theta(B)}{\varphi(B)}a_t$$

wobei  $\omega(B) = (\omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s)$  and  $\delta(B) = (1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r)$ . Ein Beispiel sind die aus der Theorie rationaler Erwartungsbildung ableitbaren geometrischen Lag-Modelle, die einem  $X_t$ -Input eine anfänglich starke, dann geometrisch abfallende, gegen Null tendierende Wirkung auf  $Y$  zuschreiben:<sup>5</sup>

<sup>5</sup> Eine ausführliche Erörterung des analytischen Gehalts solcher Modelle findet sich in Thome (1992).

$$(13) \quad (1 - \delta B)Y_t = \omega_0 X_t + \frac{\theta(B)}{\varphi(B)} a_t$$

$$Y_t = \frac{\omega_0}{1 - \delta_1 B} X_t + \frac{\theta(B)}{\varphi(B)(1 - \delta B)} a_t$$

Für die Ausreißermodellierung benötigen wir solche "Transferfunktions-Modelle" mit einem speziellen Input  $X_t$  in Form binär kodierten Variablen (sog. Interventionsmodelle).

## 2. Ausreißer-Modelle

Innerhalb der Box/Jenkins-Methode werden Ausreißer als Interventionseffekte behandelt. Im üblichen Sprachgebrauch sind "Interventionen" geplante oder ungeplante "Ereignisse" (z. B. gesetzgeberische Maßnahmen oder Naturkatastrophen), die eine vorübergehende oder andauernde, abrupte oder allmähliche Verschiebung im mittleren Niveau einer Zeitreihe bewirken.<sup>6</sup> Derartige Niveauverschiebungen können grundsätzlich auch als Folge nicht bekannter Ereignisse auftreten, z. B. als Folge einer fehlerhaften Messung oder Kodierung. Gelegentlich mögen solche Effekte in Form einzelner, herausragender Spitzen ("peaks") im Plot einer Zeitreihe per Augenschein wahrnehmbar sein. In anderen Fällen, etwa bei einer unregelmäßigen Saisonfigur, können derartige Anomalien dem Auge durchaus verborgen bleiben und dann unkontrolliert die Schätzung der Modellparameter verzerren. Es liegt nahe, Ausreißer unabhängig vom Mechanismus ihrer Verursachung als Effekte von "Interventionen" mit den gleichen formalen Mitteln zu modellieren, die *Box/Tiao* (1975) in ihrer bahnbrechenden Studie entwickelt haben, als sie beispielsweise die Auswirkungen neuer Verkehrsregularien auf den CO<sub>2</sub>-Ausstoß in Los Angeles untersuchten. Die von ihnen vorgeschlagene Methodik ist allerdings durch eine ausgeklügelte (und ziemlich aufwendige) Suchstrategie zu ergänzen, mit der zunächst unbekannte Ausreißer aufzuspüren sind. Bevor wir uns diese Suchstrategie ansehen, seien kurz die vier Standard-Modelle vorgestellt, mit denen Ausreißer formal definiert werden:

### (a) Additive Ausreißer (AO):

Man spricht von einem "additiven Ausreißer" (AO), wenn ein bekanntes oder unbekanntes Ereignis lediglich zum Zeitpunkt  $t=T$  einen "anormalen" Wert (anomal in bezug auf einen spezifischen stochastischen Prozeß) in einer Reihe erzeugt. Ein typisches Beispiel sind Fehlkodierungen, bei denen statt "50" eine "05" eingegeben wird. Die beobachtete, ausreißerbehafte Reihe  $\{Z_t\}$  kann wie folgt dargestellt werden:

<sup>6</sup> Siehe hierzu die klassische Studie von *Box/Tiao* (1975).



$$(14) \quad Z_t = Y_t + \omega_{AO} P_t(T) \quad ; \quad P_t(T) = \begin{cases} 1 & \text{für } t = T \\ 0 & \text{für } t \neq T \end{cases}$$

$Y_t$  repräsentiert den ausreißerfreien Prozeß gemäß Gleichung (6).  $P_t(T)$  ist eine Dummy-Variable, die bei  $t=T$  den Wert "1", bei allen anderen Zeitpunkten  $t \neq T$  den Wert "0" annimmt (sog. Pulse-Input). Der zu schätzende Koeffizient  $\omega_{AO}$  ist eine Maßzahl für die Größe des Ausreißereffekts (zum Schätzverfahren siehe unten).

(b) Innovative Ausreißer (IO):

Ein ausreißerproduzierendes Ereignis kann u. U. von dem stochastischen Prozeß wie ein einmaliger zusätzlicher "random shock" verarbeitet werden, also den gleichen "Filter" in Gestalt der AR- und MA-Polynome passieren wie die  $\{a_t\}$  in Modell (6). Das führt zu

$$(15) \quad Z_t = Y_t + \frac{\theta(B)}{\varphi(B)} \omega_{IO} P_t(T)$$

$$= \frac{\theta(B)}{\varphi(B)} [a_t + \omega_{IO} P_t(T)]$$

Beim additiven Ausreißer wird dem Zeitreihenwert  $Y_{t-T}$  ein bestimmter Betrag, nämlich  $\omega_{AO}$ , direkt hinzugefügt. Im Modell (15) wird der Betrag  $\omega_{IO}$  dagegen dem "random shock"  $a_{t-T}$  hinzugefügt.<sup>7</sup> Das ausreißerproduzierende Ereignis wirkt also nicht nur punktuell, auf eine Beobachtungsperiode begrenzt, sondern beeinflusst - gesteuert durch den ARMA- oder ARIMA-Filter des Prozesses - im Prinzip alle Werte  $Y_t$  mit  $t \geq T$ . Der Verlauf dieser "Nachwirkungen" ist durch die  $\psi$ -Gewichte bestimmt (siehe Gleichung (7 a)), die u. U. rasch gegen Null tendieren. Der IO ist der einzige Ausreißer-Typ, dessen Effekt von der Modellstruktur des Prozesses  $\{Y_t\}$  abhängt.<sup>8</sup>

Manche Autoren beschränken den Begriff "Ausreißer" auf die soeben dargestellten Typen der additiven und der innovativen Ausreißer. Wenn man sie aber erst einmal in Form von Interventionsmodellen dargestellt hat, liegt es nahe, auch andere Interventions-effekte in das Konzept der Ausreißer-Modellierung einzubeziehen, da auch andere Typen von Interventionen dem Analytiker zunächst unbekannt sein mögen. Dazu gehört vor allem die dauerhafte Niveaushiftung (LS).

<sup>7</sup> Daraus erklärt sich die Bezeichnung "innovative" Ausreißer; denn die  $\{a_t\}$  werden auch als "Innovationen" bezeichnet.

<sup>8</sup> Bei einer nichtstationären, differenzierten Reihe kann der IO eine dynamische Niveaushiftung bzw. eine Trendänderung hervorrufen. Deshalb ist Vorsicht geboten, wenn in dem ARIMA-Modell eine Trendkonstante geschätzt werden soll. Liu/Chen (1990: 22) empfehlen, in diesem Falle die automatische Ausreißeridentifikation für IO zu unterdrücken.

(c) Dauerhafte Niveauverschiebung ("Level Shift" - LS)

Sie wird wie folgt dargestellt:

$$(16) \quad Z_t = Y_t + \omega_{LS} S_t(T) \quad ; \quad S_t(T) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq T \\ 0 & \text{für } t < T \end{cases}$$

wobei die Dummy-Variable  $S_t$  für alle  $t \geq T$  den Wert "1" und nur für  $t < T$  den Wert "0" annimmt (sog. Step-Input). Durch Differenzenbildung läßt sich der Step-Input in einen Pulse-Input transformieren:  $(1-B)S_t = S_t - S_{t-1} = P_t$ . Wird dieser Filter auf die Gleichung (16) insgesamt angewandt, so wird daraus

$$(16a) \quad (1 - B)Z_t = (1 - B)Y_t + \omega_{LS} P_t(T)$$

$$Z_t = Y_t + \frac{\omega_{LS}}{1 - B} P_t(T)$$

(d) Zeitweilige Niveauverschiebung ("Temporary Change" - TC)

Um die Flexibilität der Modellierung zu erhöhen, scheint es sinnvoll, auch einen Reaktionsprozeß vorzusehen, der das Niveau der Zeitreihe nicht dauerhaft verschiebt, aber auch nicht nur einen punktuellen Ausreißer hervorbringt, sondern nach einem relativ starken Anfangseffekt die Ausreißer allmählich, mehr oder weniger verzögert, tendenziell auf Null reduziert. Das entsprechende Modell lautet:

$$(17) \quad Z_t = Y_t + \frac{\omega_{TC}}{1 - \delta B} P_t(T) \quad , \quad 0 < \delta < 1$$

Je größer der Parameter  $\delta$  ist, desto länger dauert nach  $t=T$  die Rückkehr der Zeitreihe zum Normalniveau. Bei  $\delta=1$  ist Modell (17) identisch mit Modell (16 a) des LS; bei  $\delta=0$  ist es identisch mit Modell (14) des AO. Im Ablauf der Zeitreihe läßt sich eine Reaktion gemäß Modell (17) u. U. auch nicht von der Reaktionsform innovativer Ausreißer unterscheiden, vor allem, wenn es sich bei  $\{Y_t\}$  um einen AR(1)-Prozeß handelt.

Die definitorischen Interventionsmodelle eignen sich wegen ihrer Komplexität schlecht als Schätzmodelle im Rahmen einer Suchstrategie zur Entdeckung von Ausreißern. Einfachere Testmodelle zur Identifikation von Ausreißern lassen sich konstruieren, wenn man die Effekte von Ausreißern auf die Modell-Residuen geklärt hat.

**3. Ausreißer-Effekte in den Residuen**

Die Identifikation und Schätzung der Ausreißer-Modelle erfolgt in einem mehrstufigen Verfahren nicht zuletzt durch die Analyse der (geschätzten) Residuen. Wir müssen also

untersuchen, wie sich Ausreißer in den Residuen niederschlagen, welche informations-trächtigen Spuren sie dort hinterlassen. Wie in Abschnitt 1 erläutert, kann das ARMA-Modell für den ausreißerfreien Prozeß  $\{Y_t\}$  wie folgt geschrieben werden:

$$(18) \quad Y_t = \frac{\theta(B)}{\varphi(B)} a_t$$

$$\frac{\varphi(B)}{\theta(B)} = a_t$$

$$\pi(B) Y_t = a_t$$

$$(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) Y_t = a_t, \quad \pi_0 = 1$$

Wenn wir das ARMA-Modell für  $\{Y_t\}$  als bekannt voraussetzen und das Gewichtungsschema (den "Filter")  $\pi(B)$  nicht auf  $\{Y_t\}$ , sondern auf den ausreißerbehafteten Prozeß  $\{Z_t\}$  anwenden, erhalten wir eine von dem Noise  $\{a_t\}$  abweichende Residualreihe  $\{e_t\}$ :

$$(19) \quad \pi(B) Z_t = e_t$$

Die Differenz zwischen den beiden Residuenreihen ist abhängig vom vorliegenden Typ des Ausreißers. (Vorläufig gehen wir von einem einzelnen Ausreißer aus, dessen zeitliche Lokalisierung bekannt ist.). Für einen additiven Ausreißer läßt sie sich wie folgt ableiten: Zunächst wird Gleichung (14) mit dem Polynom  $\pi(B)$  multipliziert. Daraus ergibt sich

$$(20) \quad \pi(B) Z_t = \pi(B) Y_t + \pi(B) \omega_{A0} P_t(T)$$

$$e_t = a_t + \pi(B) \omega_{A0} P_t(T)$$

Die ausreißerbehaftete Residuenreihe  $\{e_t\}$  und die "wahre" Noise-Reihe  $\{a_t\}$  sind also für alle  $t < T$  identisch, da für diese Zeitpunkte  $P_t(T) = 0$  ist. Zum Zeitpunkt  $t=T$  weichen sie um den Betrag  $\omega_{A0}$  voneinander ab, da  $P_t(T) = 1$  und (per Definition)  $\pi_0 = 1$  (s. Gleichung (18)). Für die folgenden Zeitpunkte  $t=T+k$ ,  $k=1,2,\dots,n-T$  ergeben sich die Abweichungen aus dem Produkt  $-\pi_k \omega_{A0}$ .<sup>9</sup> Für einen AR(1)-Prozeß (mit  $\pi_k=0$  für  $k>1$ ) bedeutet dies beispielsweise, daß es nur noch zum Zeitpunkt  $t=T+1$  eine weitere Abweichung (mit - bei positivem Phi-Gewicht - umgekehrtem Vorzeichen) der  $\{e_t\}$  von den  $\{a_t\}$  gibt. Für alle weiteren Zeitpunkte  $t=T+2,\dots,n$  sind die  $\{e_t\}$  und die  $\{a_t\}$  wieder identisch, da beim AR(1)  $\pi_k=0$  gilt für alle  $t > T+1$ .

<sup>9</sup> Zum Zeitpunkt  $T+k$ ,  $k > 0$  ist zwar  $P_t = 0$ , da aber dem Pi-Gewicht  $\pi_k$  der Lag-Operator  $B^k$  zugeordnet ist,  $P_t$  also um  $k$  Zeitpunkte zurückzuversetzen ist, ergibt sich  $P_{t-k} = 1$  für alle  $t > T$ .

Eine andere Situation liegt vor, wenn wir es mit einem innovativen Ausreißer zu tun haben. Aus Gleichung (15) wird

$$(21) \quad \pi(B)Z_t = \pi(B)Y_t + \pi(B) \frac{\theta(B)}{\varphi(B)} \omega_{IO} P_t(T)$$

$$e_t = a_t + \omega_{IO} P_t(T) \cdot \frac{\theta(B)}{\varphi(B)} = \pi(B)^{-1}$$

Während der IO in der beobachteten Reihe  $\{Z_t\}$  in einer ganzen Serie anomaler Werte auftritt, kommt es in der Residualreihe nur zu einer punktuellen Abweichung um den Betrag  $\omega_{IO}$  zum Zeitpunkt  $t=T$ , da  $P(T)$  zu allen anderen Zeitpunkten gleich Null ist.

In der gleichen Weise lassen sich die Residuenausreißer auch in den Fällen einer dauerhaften und einer vorübergehenden Niveauverschiebung bestimmen:

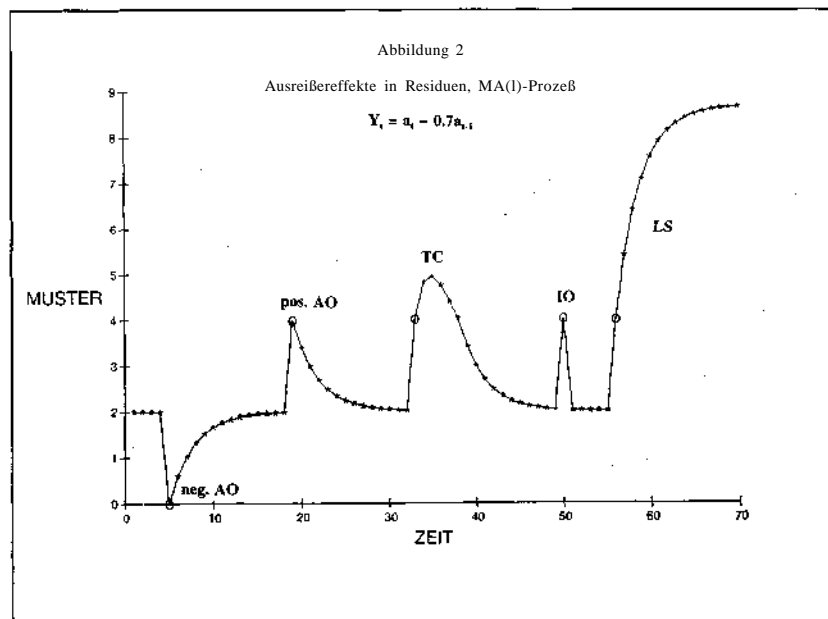
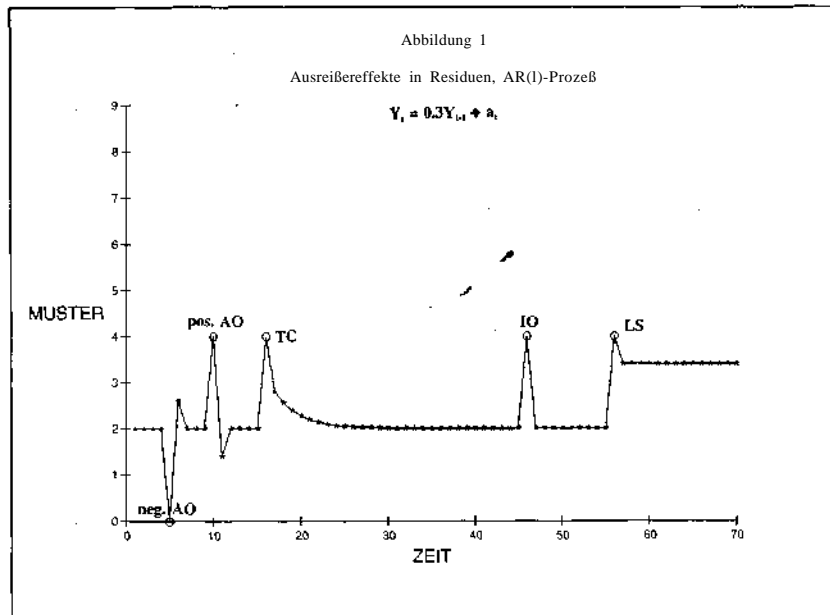
$$(22) \quad e_t = a_t + \pi(B) \frac{\omega_{LS}}{1-B} P_t(T) \quad \text{für LS}$$

und

$$(23) \quad e_t = a_t + \pi(B) \frac{\omega_{TC}}{1-\delta B} P_t(T) \quad \text{für TC}$$

Die verschiedenen Ausreißereffekte in den Residuen können wie folgt dargestellt werden.<sup>10</sup> Wir simulieren zunächst eine Zeitreihe  $\{Y_t\}$  mit ihrer "wahren" Noisekomponente  $\{a_t\}$  gemäß einem bestimmten ARMA-Modell. Zu  $\{Y_t\}$  addieren wir einzelne Ausreißereffekte gemäß den Definitionsgleichungen in Abschnitt 2 und erhalten somit die ausreißerbehafte Reihe  $\{Z_t\}$ . Durch Anwendung des inversen ARMA-Filters auf  $\{Z_t\}$  lassen sich nun die geschätzten Residuen  $\{e_t\}$  leicht ermitteln. In der Differenz  $\{e_t\} - \{a_t\}$  werden schließlich die "reinen" Residueneffekte der Ausreißer sichtbar. Die Abbildungen 1 und 2 zeigen diese ausreißerbedingten Residueneffekte für ein AR(1)-Modell  $(1-0.3B)Y_t = a_t$  und ein MA(1)-Modell  $Y_t = (1-0.7B)a_t$ ;  $a_t \sim N(0,1)$ .

<sup>10</sup> Vergleiche zum folgenden die Simulationsbeispiele in *Chen/Liu/Hudak* (1990: 8 ff.).



4. Schätzen der Ausreißer-Effekte

Wenn wir voraussetzen, daß nicht nur das ARMA-Modell, also die Gewichte  $\pi(B)$ , sondern auch der Zeitpunkt des ausreißerproduzierenden Ereignisses bekannt sind, lassen sich die Gleichungen (20) bis (23) wie folgt schreiben:

$$(24) \quad e_t = \omega_m X_{mt} + a_t, \quad m = 1, 2, 3, 4$$

$$\text{mit } \omega_1 = \omega_{AO}, \quad \omega_2 = \omega_{IO}, \quad \omega_3 = \omega_{LS}, \quad \omega_4 = \omega_{TC}$$

$$\begin{aligned} \text{und } X_{1t} &= \pi(B)P_t(T) && \text{für } AO \\ X_{2t} &= P_t(T) && \text{für } IO, \quad \pi(B)=1 \\ X_{3t} &= \frac{\pi(B)}{1-\delta B} P_t(T) && \text{für } TC \\ X_{4t} &= \pi(B)(1-B)^{-1} P_t(T) \\ &= \pi(B)S_t && \text{für } LS \text{ (s. Gleich. (16a))} \end{aligned}$$

Gleichung (24) stellt ein bivariates Regressionsmodell mit unkorrelierten Fehlern dar (die  $\{a_t\}$  sind laut Voraussetzung weißes Rauschen). Der Index  $m$  differenziert die vier Ausreißer-Typen. Die Regressor-Variable  $X_{mt}$  hat bei jedem Ausreißer-Typ den Wert "0" für alle  $t < T$  und den Wert "1" für  $t = T$ . Für alle weiteren Zeitpunkte  $t = T+k, k=1, 2, \dots, n-T$  unterscheiden sich die  $X_{mt}$ -Werte je nach Ausreißertyp (s. *Chen/Liu* 1990: 7):

$$(25) \quad \begin{aligned} \text{für } AO: & \quad -\pi_k \\ \text{für } IO: & \quad 0 \\ \text{für } TC: & \quad \delta^k - \sum_{j=1}^{k-1} \delta^{k-j} \pi_j - \pi_k \\ \text{für } LS: & \quad 1 - \sum_{j=1}^k \pi_j \end{aligned}$$

Diese Größen ergeben sich aus der Multiplikation der Pi-Gewichte  $(1-\pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots)$  mit der binären Variablen  $P_t(T)$  und - bei *TC* und *LS* - dem jeweiligen Summationsoperator.

Es bietet sich an, den Parameter  $\delta$  auf einen Wert zu fixieren, der ausreichend weit entfernt ist von den Grenzwerten ( $\delta=0$  bzw.  $\delta=1$ ), bei denen der *TC*-Ausreißer in den *AO*- bzw. den *LS*-Ausreißer übergeht. *Chen/Liu* (1990) schlagen der Wert  $\delta = 0.7$  vor. Wenn das ARMA-Modell und der Zeitpunkt  $t=T$  des ausreißerproduzierenden Ereignisses bekannt sind, läßt sich dessen Effekt  $\omega_m$  als Steigungsparameter des bivariaten Regressionsmodells (24) nach dem Kleinst-Quadrate-Ansatz aus den bekannten Reihenwerten  $\{e_t\}$  und  $\{X_{mt}\}$  schätzen:

$$(26) \hat{\omega}_m = \frac{\sum_{t=1}^n e_t X_{mt}}{\sum_{t=1}^n X_{mt}^2} = \frac{\sum_{t=T}^n e_t X_{mt}}{\sum_{t=T}^n X_{mt}^2}$$

Die Modellgleichung für den additiven Ausreißer hat beispielsweise folgendes Aussehen:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_{T-1} \\ e_T \\ e_{T+1} \\ e_{T+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ -\pi_1 \\ -\pi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -\pi_{n-T} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{T-1} \\ a_T \\ a_{T+1} \\ a_{T+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}$$

Im Falle des innovativen Ausreißers ist der Omega-Schätzer identisch mit dem Residualwert  $e_{t=T}$ , da  $X_{it}$  nur bei  $t=T$  den Wert "1" und bei allen anderen  $t = 1, 2, \dots, T-1, T+1, \dots, n$  den Wert "0" annimmt. Falls  $T=n$ , sind auch die Effekte der anderen Ausreißer-Typen  $\sigma$  gleich  $e_T$ ; empirisch lassen sich die Ausreißertypen nicht unterscheiden, wenn das ausreißerproduzierende Ereignis am Ende der Reihe auftritt (Chen/Liu 1990: 7).

Chang/Tiao/Chen (1988) haben die Standardfehler für die  $\hat{\omega}_m$ -Gewichte abgeleitet:

$$\sigma_{\hat{\omega}} = \frac{\sigma_a}{\sum_{t=T}^n X_{mt}^2}$$

Aus der Division der  $\hat{\omega}_m$ -Gewichte durch ihre Standardfehler ergeben sich die folgenden Teststatistiken (s. Chen/Liu 1990: 7; Wei 1990: 196 ff.):

$$\begin{aligned}
 (27) \quad \hat{\tau}_{AO}(T_v) &= \frac{\hat{\omega}_{AO}(T_v)}{\hat{\sigma}_a} \sum_{i=T_v}^n X_{1i}^2 \\
 \hat{\tau}_{IO}(T_v) &= \frac{\hat{\omega}_{IO}(T_v)}{\hat{\sigma}_a} \\
 \hat{\tau}_{TC}(T_v) &= \frac{\hat{\omega}_{TC}(T_v)}{\hat{\sigma}_a} \sum_{i=T_v}^n X_{2i}^2 \\
 \hat{\tau}_{LS}(T_v) &= \frac{\hat{\omega}_{LS}(T_v)}{\hat{\sigma}_a} \sum_{i=T_v}^n X_{4i}^2, \quad v = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

Unter der Nullhypothese  $\omega_m = 0$ , bekannter Lokation der Ausreißer und bekannten Modellparametern sind diese Teststatistiken normalverteilt (Tsay 1988: 5). Um sie berechnen zu können, muß zunächst die Standardabweichung der Noise-Terme,  $\sigma_a$ , auf der Basis der  $\{e_i\}$  geschätzt werden. Chen/Liu (1990: 10 f.) schlagen vor, hierzu einen robusten Schätzer zu verwenden, beispielsweise die Statistik MAD (Median-Absolute-Deviation):

$$\hat{\sigma}_a = 1.483 \{ |e_i - \tilde{e}| \}$$

Dabei bezeichnet  $\tilde{e}$  den Median der Residualreihe. Ein Ausreißereffekt bestimmten Typs wird angenommen, wenn die entsprechende Teststatistik einen kritischen Wert  $C$  überschreitet. Wenn, wie üblich, der Zeitpunkt  $T$  der Ausreißer-Intervention unbekannt ist, tritt das Problem des multiplen Testens für  $T = 1, 2, \dots, n$  auf: das Fehlerrisiko  $\alpha$ , das man bei Ablehnung der Nullhypothese eingeht, ist für die gesamte Testprozedur wesentlich größer als für jeden einzelnen Test. Führt man  $n$  Tests durch und wählt für jeden einzelnen Test das Fehlerrisiko  $\alpha$ , so beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens einmal die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird, d. h. mindesten ein signifikantes Ergebnis  $s$  auftritt (s. Stier 1992: 91 f.):  $P(s \geq 1) = 1 - (1 - \alpha)^n$ . In der Praxis wird in solchen Fällen häufig die sog. Bonferroni-Adjustierung vorgenommen, der einzelne Test also auf einem Signifikanzniveau von  $\alpha/n$  durchgeführt. Das bedeutet, daß der kritische Wert der Teststatistik bei jedem einzelnen einer Serie von  $n$  Tests nicht, wie beispielsweise bei der t-Verteilung üblich, mit  $C = 2$ , sondern mit  $C > 2$  festzusetzen ist.

Wenn die Lokation der Ausreißer und die Modellparameter nicht bekannt sind, ist die exakte Verteilung der Tau-Teststatistik nicht ableitbar. Chen u. Liu (1990: 15 ff.) haben für verschiedene ARIMA-Modelle, unterschiedliche Stichprobengrößen (unterschiedliche Zeitreihenlängen) und diverse robuste Schätzmethoden zur Bestimmung von  $\hat{\sigma}_a$  das Sampling-Verhalten der Teststatistiken untersucht, um Anhaltspunkte für die zu wählenden kritischen Werte zu erhalten. Die Teststatistiken der additiven, innovativen und TC-Ausreißer zeigen ein relativ homogenes Verhalten hinsichtlich der unterschiedlichen ARIMA-Modelle. Die  $C$ -Werte des Level-Shifts lagen bei stationären ARMA-Modellen



(und gleichem  $\alpha$ -Niveau) deutlich unter den kritischen Werten der anderen Ausreißertypen, stiegen aber bei (nicht-stationären) ARIMA-Modellen merklich an. Mit der Absicht, zwischen Fehlertyp I und Fehlertyp II einen Kompromiß zu finden, geben *Chen/Liu* (1990: 22) schließlich folgende generelle Empfehlung für die Wahl der kritischen Werte: Für eine Zeitreihenlänge von  $100 \leq n \leq 200$  wähle man ein  $C = 3.0$ ; für kürzere Reihen ein  $C$  zwischen 2.5 und 2.9 und für längere Reihen ein  $C > 3.0$  (vergl. *Tsay* 1988: 8).<sup>11</sup>

Damit sind die wichtigsten formalen Bausteine zusammengetragen, die es uns erlauben, das iterative Verfahren von *Chen* und *Liu* (1990) in seinem Ablauf darzustellen.

### 5. Das iterative Identifikations- und Schätzverfahren von Chen und Liu

Die Ausgangssituation ist durch folgendes Problem gekennzeichnet: Wenn die Ausreißereffekte und die Zeitpunkte ihres Auftretens bekannt sind, kann man die beobachtete Zeitreihe entsprechend bereinigen und die Modellparameter unbeeinflusst durch die Ausreißer schätzen. Andererseits: Erst wenn die Modellparameter und die Residuen bekannt sind, lassen sich die Ausreißer identifizieren. Einen Ausweg aus diesem Dilemma bietet nur ein iteratives Verfahren, das die Ausreißereffekte und die ARMA-Parameter sukzessive in wechselseitiger Anpassung (in diesem Sinne "gemeinsam") schätzt. Dabei ist zu beachten, daß die Schätzung eines Ausreißereffekts für  $t=T_i$  durch benachbarte Ausreißereffekte kontaminiert sein kann (Problem der multiplen Ausreißer).

Gestützt auf Arbeiten insbesondere von *Chang/Tiao* (1983) und *Chang/Tiao/Chen* (1988) haben *Chen/Liu* (1990) ein Verfahren vorgeschlagen, das dieser Problemkonstellation weitgehend Rechnung trägt. Zunächst wird mit Hilfe der üblichen Instrumente (insbesondere der Autokorrelationsfunktion (AKF) und der partiellen AKF) ein ARIMA-Modell für die beobachtete (evtl. ausreißerbehaftete) Zeitreihe vorläufig identifiziert. Das Verfahren durchläuft sodann in drei Stufen mehrere innere und äußere Schleifen.

**Stufe I** dient der vorläufigen Schätzung der Modellparameter und der schrittweisen Identifikation der Ausreißer.

I.1 Die Parameter des empirisch identifizierten ARMA-Modells werden anhand der beobachteten Zeitreihe  $\{Z_t\}$  mit den üblichen Verfahren (in der Regel nach der

<sup>11</sup> Es bleibt natürlich problematisch, Signifikanztests durchzuführen, bei denen das Fehlerrisiko nicht exakt bekannt ist. (Zur Unbestimmtheit der theoretischen Verteilungsfunktion bei unbekanntem Modellparametern und unbekanntem Interventionszeitpunkten siehe *Tsay* 1988: 8). Hinzu kommt, daß es in konkreten Anwendungssituationen oft schwierig sein dürfte zu entscheiden, ob der Fehlertyp I oder eher der Fehlertyp II niedrig zu halten ist.

Maximum-Likelihood-Methode) geschätzt. Die zu diesem Modell gehörenden Residuen  $\{\hat{\epsilon}_t\}$  werden bestimmt. Wenn die Schleife nach der ersten Iteration zu dieser Stufe zurückkehrt, tritt die ausreißerbereinigte Zeitreihe an die Stelle der Originaldaten.

- I.2 Hier beginnt die erste innere Schleife, in der die Ausreißer unter Vorgabe des vorläufig geschätzten ARMA-Modells aufgespürt werden. Für alle Zeitpunkte  $t=1,2,\dots,n$  und alle Typen werden die standardisierten Ausreißereffekte gemäß Gleichung (26) auf der Basis der  $\{\hat{\epsilon}_t\}$  geschätzt und der maximale Effekt

$$(27a) \quad \eta_v = \max \{ |\hat{\epsilon}_{AO}(v)|, |\hat{\epsilon}_{IO}(v)|, |\hat{\epsilon}_{TC}(v)|, |\hat{\epsilon}_{LS}(v)| \}, \quad v=1,2,\dots,n$$

ermittelt. Falls der maximale Effekt den vorher festgelegten kritischen Wert  $C$  übersteigt, folgt der Schritt I.3. Falls kein Ausreißer gefunden wird, der dieses Kriterium erfüllt, folgt Schritt I.4.

- I.3 Die beobachtete Zeitreihe wird um den Ausreißereffekt gemäß einer der Modellgleichungen (14) bis (17) bereinigt (je nach dem Typ des identifizierten Ausreißers). Danach erfolgt die Rückkehr zu I.2, um anhand der bereinigten Reihe zu prüfen, ob ein weiterer (maximaler) Ausreißereffekt den kritischen Wert  $C$  überschreitet.
- I.4 Falls in der allerersten Etappe der inneren Schleife in I.2 kein signifikanter Ausreißer gefunden wird, wird die Prozedur mit dem Ergebnis beendet, daß die beobachtete Zeitreihe keine Ausreißer enthält. Falls in I.2 Ausreißer gefunden worden sind, kehrt das Verfahren nach dem letzten Durchlauf von I.3 zu I.1 zurück, um die vorläufigen ARMA-Parameter anhand der außereißerbereinigten Reihe erneut zu schätzen. Die innere Schleife wird in den Schritten I.2 und I.3 so lange wiederholt, bis keine neuen Ausreißer mehr auftreten. Dann erfolgt der Übergang zu

**Stufe II**, in der die bisher einzeln identifizierten Ausreißer simultan geschätzt werden.

Die simultane Schätzung ist notwendig, weil benachbarte Ausreißereffekte sich überlagern können und somit die in Stufe I in einer "forward selection" einzeln ausgewählten Effekte u. U. verzerrt geschätzt worden sind.

- II.1 Nehmen wir an, es seien in Stufe I  $k$  Ausreißer gleichen oder unterschiedlichen Typs für die Zeitpunkte  $T_1, T_2, \dots, T_k$  identifiziert worden. Ihre Effekte werden nun simultan geschätzt, indem das einfache Regressionsmodell der Gleichung (24) zu einem multiplen Regressionsmodell erweitert wird:

$$(28) \quad \hat{\varepsilon}_t = \sum_{j=1}^{\kappa} \omega_j X_{jt} + a_t \quad ; \quad t = 1, 2, \dots, n$$

Die Regressoren  $X_{jt}$  werden gemäß den Anmerkungen zu Gleichung (24) je nach identifiziertem Ausreißertyp gebildet, wobei für den Index  $t$  die spezifischen Zeitpunkte  $T_j$  ( $j=1, 2, \dots, \kappa$ ) eingesetzt werden. (Auf den Index  $m$  zur Kennzeichnung der Ausreißertypen wurde in Gleichung (28) verzichtet.)

II.2 Für jedes  $\hat{\omega}_j$  wird gemäß Gleichung (27) die Teststatistik  $\hat{\tau}_j$  ( $j=1, 2, \dots, \kappa$ ) berechnet und für eine "backward selection" herangezogen: Falls die minimale Teststatistik, den in I.2 vorgegebenen kritischen Wert  $C$  unterschreitet, falls  $\min_j |\hat{\tau}_j| \leq C$ , wird der für den Zeitpunkt  $T_j$  identifizierte Ausreißer aus der Liste der Ausreißer gestrichen. Die restlichen Ausreißer werden erneut in II.1 simultan geschätzt. Wenn keine minimale Teststatistik mehr den kritischen Wert  $C$  unterschreitet, erfolgt der Übergang zu II.3.

II.3 Die beobachtete Zeitreihe wird um die Ausreißereffekte bereinigt, die in II.1 geschätzt wurden und den Signifikanztest in II.2 bestanden haben.

II.4 Für die adjustierte Reihe werden die ARMA-Parameter und der Standardfehler  $\sigma_u$  erneut geschätzt. Falls sich mit den neuen Parametern der Standardfehler der Residuen gegenüber der bisherigen Schätzung relativ um mehr als eine vorgegebene Größe  $\varepsilon$  ändert (z. B.  $\varepsilon = 0.001$ ), erfolgt eine Rückkehr zu II.1, andernfalls der Übergang zu III.1.

Stufe III dient der endgültigen Identifikation und Schätzung der Ausreißereffekte; die ARMA-Parameter werden nicht mehr korrigiert.

III.1 Die Residuen  $\{\hat{\varepsilon}_t\}$  werden auf der Basis des in II.3 endgültig geschätzten ARMA-Modells erneut berechnet. *Chen/Liu* (1990: 15) weisen darauf hin, daß diese Iterationsstufe besonders wichtig sei, wenn LS-Ausreißer identifiziert wurden und das Modell eine Konstante enthält.

III.2 Die Iterationen der Stufe I werden wiederholt, allerdings mit der Maßgabe, daß die Parameter des ARMA-Modells nicht neu geschätzt werden. Es ist möglich, daß nun weitere Ausreißer entdeckt werden, die in den vorläufigen Modellresiduen noch "maskiert" waren.

III.3 Die Iterationen II. 1 und II.2 der Stufe II (ohne die Schritte II.3 und II.4) werden mit den in III.3 ermittelten Residuen wiederholt, d. h., die Ausreißer werden

noch einmal gemeinsam geschätzt. Die in der letzten Iteration von II. 1 erreichten Schätzer der  $\omega_j$  repräsentieren die endgültig ermittelten Ausreißereffekte.

**6. Schätzung fehlender Werte**

In der eben beschriebenen Schätzprozedur wird die beobachtete Zeitreihe  $\{Z_t\}$  sukzessive um die Ausreißereffekte "bereinigt". Im Falle eines AO zum Zeitpunkt  $t=T$  wird, wie *Chen/Liu* (1990: 8) gezeigt haben, der außereißerbehafte Wert  $Z_T$  zu

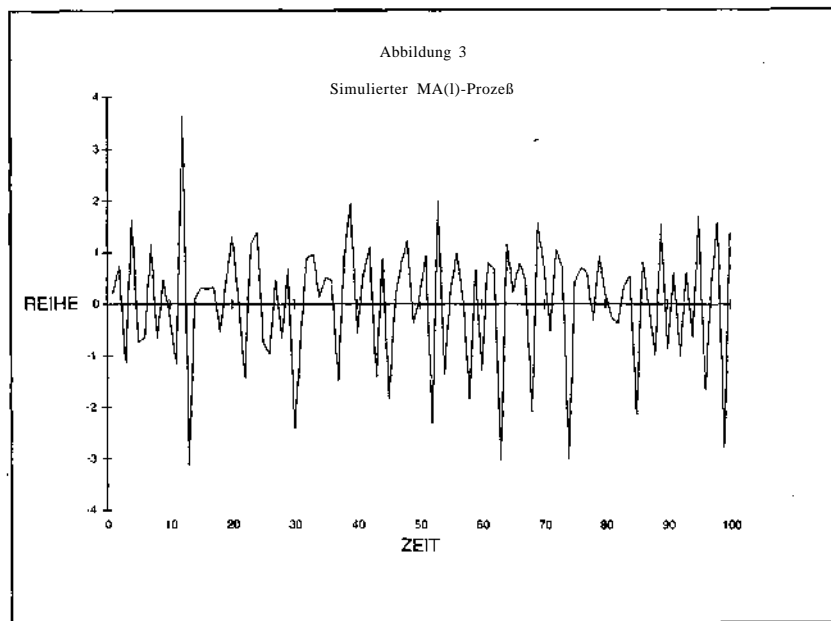
$$(29) \hat{Z}_T = \frac{\sum_{j=1}^{T-1} \left[ \sum_{k=j}^{n-T+j} \pi_k \pi_{k-j} \right] Z_{T-j} + \sum_{j=1}^{n-T} \left[ \sum_{k=j}^{n-T} \pi_k \pi_{k-j} \right] Z_{T-j}}{\sum_{j=0}^{n-T} \pi_j^2}$$

An dieser kompliziert aussehenden Gleichung sind für den Praktiker nur zwei Merkmale wichtig: (a) der angepaßte Wert  $\hat{Z}_T$  ist völlig unabhängig von dem beobachteten Wert  $Z_T$ ; (b)  $\hat{Z}_T$  ergibt sich aus der gewichteten Summe aller beobachteten Werte  $Z_t$  mit  $t \neq T$ . Das heißt, der adjustierte Wert ergibt sich per Interpolation aus allen anderen Werten vor und nach dem Interventionszeitpunkt  $t=T$ , wobei die näher an  $T$  liegenden Werte stärker gewichtet sind als die weiter entfernt liegenden Beobachtungen. *Chen/Liu* (1990) schlagen deshalb vor, fehlende Werte dadurch zu schätzen, daß man sie als additive Ausreißer definiert und anschließend durch die adjustierten Werte gemäß Gleichung (29) ersetzt.

**7. Anwendungsbeispiele**

Ich möchte das oben skizzierte Verfahren zunächst anhand eines Simulationsbeispiels demonstrieren.<sup>12</sup> Generiert wurde eine Zeitreihe  $Y_t$  mit  $t=1,2,\dots,100$  in Form eines MA(1)-Prozesses:  $Y_t = (1 - 0.7B)a_t$ , wobei für  $a_t$  eine Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Varianz 1 vorgegeben wurde (siehe Abb. 3).

<sup>12</sup> Sämtliche Rechnungen wurden mit dem SCA-Programmpaket durchgeführt (s. *Liu/Hudak* 1986; *Chen/Liu/Hudak* 1990).



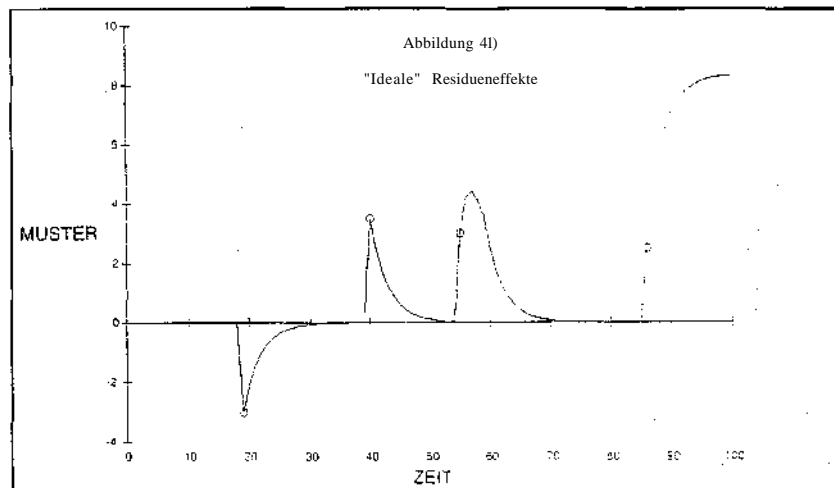
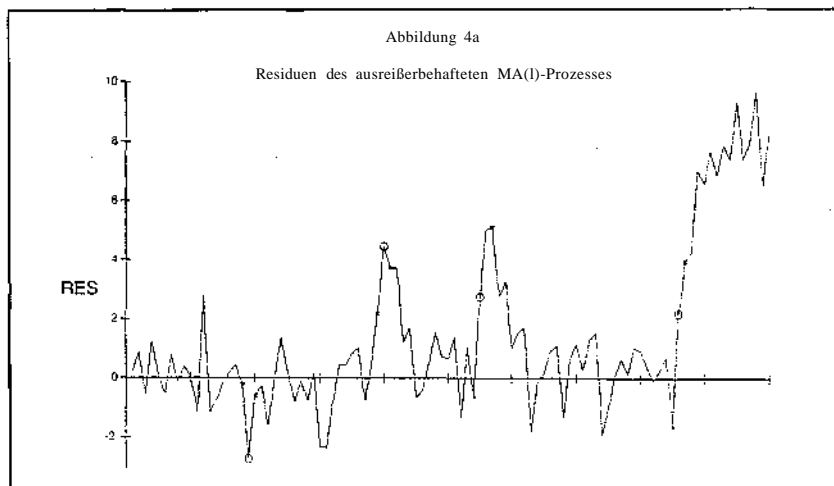
Obwohl die Reihe einige Spitzen mit Werten  $y_t > |3|$  (bei  $t=12,13,63,74$ ) enthält, werden bei Anwendung des eben beschriebenen Verfahrens (mit  $C=3$ ) korrekterweise keinerlei Ausreißer identifiziert.<sup>13</sup> Die Maximum-Likelihood-Schätzungen ergeben  $\hat{\theta} = 0.654$  und  $\hat{\sigma}_a = 1.02$ . In diese simulierte Y-Reihe werden im nächsten Schritt die in Tabelle 1 aufgelisteten Ausreißer per Addition eingefügt.

Tabelle 1  
Künstlich erzeugte Ausreißer im simulierten Modell

t	Type	$\omega$	$Y_t$	$Z_t$
19	AO	-3.0	0.437	-2.563
40	AO	3.5	-0.565	2.935
55	TC	3.0	0.206	3.206
86	LS	2.5	0.839	3.339

<sup>13</sup> Wie wir noch sehen werden, produzieren diese Ausreißerkandidaten in den Residuen nicht diejenigen Muster, die man von einem AO in einem MA(1)-Prozeß erwarten kann.

Für den TC-Ausreißer wurde ein  $\delta = 0.7$  eingesetzt (siehe Gleichung (17)); der Level Shift gilt für alle Zeitpunkte  $86 \leq t \leq 100$ ;  $Z_t$  bezeichnet die Zeitreihe, die sich aus der Addition der F-Reihe und der Ausreißereffekte ergibt. Stellen wir zunächst fest, welche Spuren diese Ausreißer in den Residuen  $\{e_t\}$  der Reihe  $Z_t = (1-0.70B)e_t$  hinterlassen (s. Abb. 4a).



In Abb. 4a läßt sich die Niveaushiftung am Ende der Reihe klar erkennen, während sich die weiteren Ausreißereffekte in weniger eindeutigen Mustern abzeichnen. Abb. 4b stellt die "idealen" Muster der induzierten Ausreißereffekte dar. Wenn man sie mit der Residuenreihe  $\{e_t\}$  (in Abb. 4a) vergleicht, wird sofort deutlich, daß das exponentielle Verlaufsmuster für den additiven Ausreißer zum Zeitpunkt  $t=19$  in den Residuen  $\{e_t\}$  überhaupt nicht erscheint. Wahre Residuen und Ausreißereffekt überlagern sich hier in einer Weise, die es unwahrscheinlich macht, daß dieser additive Ausreißer mit Hilfe der entsprechenden Teststatistik "Tau" erkannt wird (er wird dann allerdings auch nicht die Identifikation des ARMA-Modells und die Schätzung der Parameter relevant stören). Aus dem gleichen Grunde wird nun auch verständlich, warum der scheinbare Ausreißer bei  $t=12$  (wie bereits erwähnt) nicht als echter Ausreißer identifiziert wird: er produziert in den Residuen keinen exponentiellen Effekt wie das bei einer zugrunde liegenden MA(1)-Struktur der Fall sein müßte. Dieses Beispiel führt besonders deutlich vor Augen, daß die Identifikation eines Ausreißers nur modellspezifisch vorzunehmen ist und die vorgegebenen Empfehlungen von *Chen* und *Liu* für die Wahl von  $C$  nicht unterschritten werden sollten.<sup>14</sup>

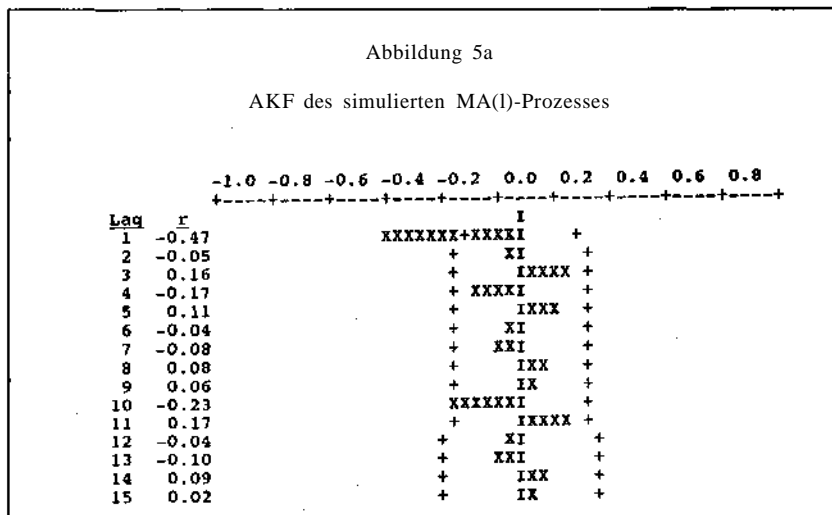
Wenn wir mit dem üblichen Maximum-Likelihood-Verfahren ohne simultane Schätzung der Ausreißereffekte den Theta-Parameter auf der Basis der ausreißerbehafteten Reihe  $\{Z_t\}$  schätzen, führt das zu folgenden Ergebnissen:  $\hat{\theta} = -0.054$ ,  $\hat{\sigma}_a = 1.679$ , Werten also, die von den wahren Modellparametern ( $\theta = 0.7$ ;  $\sigma_a = 1.0$ ) weit entfernt sind. Wenn wir dagegen das iterative Verfahren der gemeinsamen Schätzung von Ausreißern und Modellparametern anwenden und dabei die eben genannten fehlerhaften Schätzer als Startwerte einsetzen, erhalten wir folgende Ergebnisse:  $\hat{\theta} = 0.692$  und  $\hat{\sigma}_a = 1.102$ , Größen also, die den wahren Werten sehr nahe kommen. Die dabei identifizierten Ausreißer sind in Tabelle 2 wiedergegeben.

Tabelle 2			
Geschätzte Ausreißer bei Anpassung eines MA(1)-Prozesses			
t	Typ	gesch. Effekt $\hat{\omega}$	t-Statistik
40	AO	4.978	6.25
56	AO	5.943	7.47
87	LS	2.570	24.46

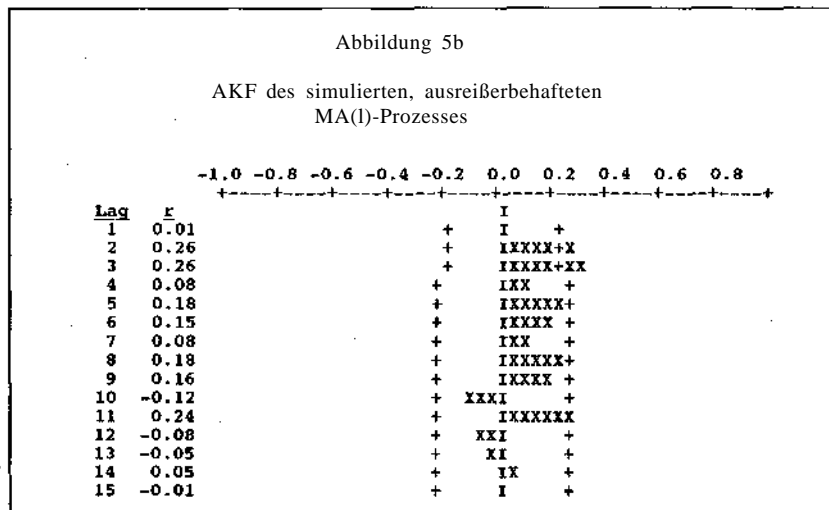
<sup>14</sup> Bei einem  $C=2.7$  wird der "Peak" bei  $t=13$  als innovativer (Schein-)Ausreißer identifiziert. Auch der AO bei  $t=19$  wird dann als IO identifiziert, was bei einem Blick auf Abb. 2 verständlich wird.

Daß die Identifikation des AO zum Zeitpunkt  $t=19$  unwahrscheinlich sei, wurde bereits erläutert. Korrekt identifiziert (wenn auch überschätzt) worden ist der AO bei  $t=40$ . Aus dem TC bei  $t=55$  ist ein AO bei  $t=56$  geworden. Die Unterscheidung von AO und TC ist bei einem MA(1) Prozeß unsicher, weil bei beiden Typen die Residuen-Effekte allmählich ausklingen. Daß der permanente Level-Shift von  $t=86$  auf  $t=87$  verschoben wurde, liegt vermutlich daran, daß erst bei  $t=87$  ein Niveau erreicht wird, das um mehr als 3 Standardabweichungen vom Mittelwert entfernt liegt.

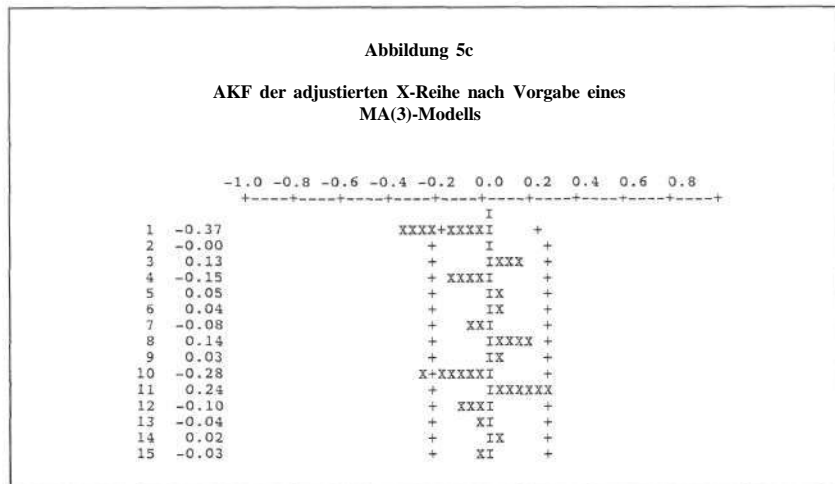
In der Forschungspraxis ist das wahre Modell in der Regel nicht bekannt, sondern wird auf der Basis der beobachteten (u. U. ausreißerbehafteten) Zeitreihe empirisch identifiziert, beispielsweise mit Hilfe der Autokorrelationsfunktion (AKF). Die AKF der ausreißerfreien, simulierten MA(1)-Reihe ist in Abb. 5a, die AKF der ausreißerbehafteten, simulierten MA(1)-Zeitreihe  $\{Z_t\}$  ist in Abb. 5b dargestellt.







Die Struktur eines MA(1)-Prozesses ist in dem zweiten Korrelogramm nicht mehr erkennbar; es indiziert eher einen MA(3)-Prozeß mit  $\theta_1 = 0$ . Wenn wir dieses Modell ohne Ausreißeridentifikation schätzen, erhalten wir signifikante Werte für die beiden übrigen Theta-Koeffizienten, und die AKF der Modellresiduen gibt keine Hinweise auf eine inadäquate Modellspezifikation. Wird das (falsche) MA(3)-Modell jedoch nach dem Chen/Liu-Verfahren, also mit simultaner Schätzung der Ausreißereffekte angepaßt, enthüllen sowohl die AKF der Residuen als auch die AKF der ausreißerbereinigten Zeitreihe  $\{Y_t\}$  (s. Abb. 5c) in klarer Weise die Struktur eines MA(1)-Prozesses.



Das zunächst angenommene MA(3)-Modell kann also revidiert und das neue Modell - MA(1) - nach dem Chen/Liu-Verfahren (korrekt, wie wir bereits sahen) geschätzt werden. Diese Modellrevision wurde möglich, obwohl wegen der falschen Vorgabe eines MA(3)-Prozesses die Ausreißereffekte nicht korrekt identifiziert werden konnten. Zusammenfassend läßt sich feststellen: Das Chen/Liu-Verfahren war in der Lage, die induzierten Ausreißer soweit zu identifizieren und die Reihe entsprechend zu adjustieren, daß a) bei korrekter Modellvorgabe - MA(1)-Prozeß - die Modellparameter korrekt geschätzt wurden, b) bei falscher Modellvorgabe - MA(3)-Prozeß - das korrekte Modell nachträglich identifiziert werden konnte. Das Verfahren war (aus einsehbaren Gründen) weniger erfolgreich bei der differenzierenden Identifikation der verschiedenen Ausreißertypen.

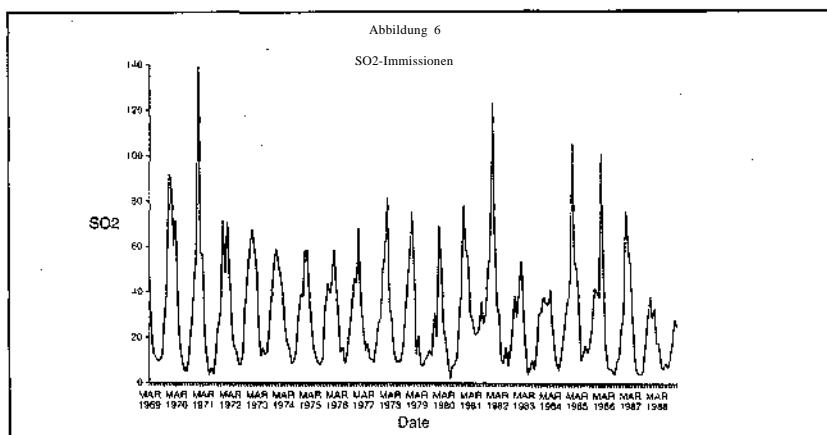
In einem zweiten Beispiel habe ich in den mit  $\theta=0.7$  und  $n=100$  simulierten MA(1)-Prozeß 9 fehlende Werte für die Zeitpunkte  $t = 12, 19, 38, 39, 40, 57, 72, 79, 91$  eingeführt und in der üblichen Weise linear mit Hilfe der beobachteten Nachbarwerte interpoliert. In der Autokorrelationsfunktion (hier nicht abgebildet) bleibt die MA(1)-Struktur des Prozesses (abgeschwächt) erkennbar, die ML-Schätzung liegt mit  $\hat{\theta} = .356$  jedoch weit neben dem Zielwert. Die Schätzung wird mit  $\hat{\theta} = 0.690$  erheblich verbessert, wenn die fehlenden Werte nur vorläufig interpoliert, dann aber, wie in Abschnitt 6 beschrieben, als additive Ausreißer behandelt und gemäß Gleichung (29) neu geschätzt werden.<sup>15</sup>

<sup>15</sup> In dem SCA-Paket geschieht das mit der gleichen Prozedur und einer speziellen Option.

Im dritten Beispiel wird untersucht, ob Versuche Schweizer Regierungsstellen, mit Hilfe verschiedener Richtlinien und Verordnungen die Schwefeldioxid-Immissionen zu senken, erfolgreich waren. Bei den Maßnahmen handelt es sich um<sup>16</sup>

- A: Richtlinien des Eidgenössischen Departement des Inneren (EDI) über die Auswurfbegrenzung bei Haus- und Industriefeuern, erlassen am 7. 2. 1972, im Juli 1983 abgelöst durch "B"
- B: Richtlinien über den Schwefelgehalt von Heizölen und Dieseltreibstoff, erlassen am 7. 7. 1983, im Jan. 1985 abgelöst durch "C"
- C: Verordnung des Bundesrates über Luftreinhalte-Maßnahmen bei Feuerungen, erlassen am 1. 1. 1985, im März 1986 abgelöst durch "D"
- D: Eine neue Luftreinhalteverordnung des Bundesrates, erlassen am 1. 3. 1986

Als abhängige Variable  $Y_t$  dienen die Monatswerte (arithmetische Mittel der Tagesdaten) der  $\text{SO}_2$ -Immissionen in  $\mu\text{g}/\text{m}^3$ , erhoben durch die Meßstation Dübendorf bei Zürich von März 1969 bis Dez. 1988 (238 Fälle). Sie sind in Abb. 6 dargestellt.



<sup>16</sup> Die Angaben sind der Arbeit von *Widmer* (1991) entnommen. Ich danke Thomas *Widmer*, der mir seine Daten überlassen hat.

Man kann den Maßnahmen-Input auf zweierlei Weise konzipieren. Im ersten Falle (Version I) erwartet man von jeder der vier Maßnahmen eine permanente Niveausenkung der  $\text{SO}_2$ -Immissionen, die durch die jeweils nachfolgende Maßnahme verstärkt wird. Demgemäß wird man jede Maßnahme als Step-Input kodieren, der von  $t=1$  bis zum Zeitpunkt der jeweiligen Intervention lauter Nullen und danach bis zum Ende der Reihe (bis  $t=238$ ) lauter Einsen enthält. Für "A" beginnen die Einsen bei  $t=37$  (März 1972), für "B" bei  $t=174$  (Aug. 83), für "C" bei  $t=191$  (Jan. 85) und für "D" bei  $t=205$  (März 1986). In dieser Modellversion wird jede neue Richtlinie danach getestet, ob sie eine zusätzliche Senkung des  $\text{SO}_2$ -Niveaus bewirkt hat. In einer zweiten Konzeption (Version II) schreibt man die nach dem März 1972 eventuell zu beobachtenden Differenzen zum  $\text{SO}_2$ -Ausgangsniveau jeweils nur derjenigen Maßnahme zu, die zu einem bestimmten Zeitpunkt in Kraft ist. Das heißt, bei der binären Input-Kodierung werden die Einsen für die Maßnahmen "A", "B" und "C" genau dann wieder durch Nullen abgelöst, wenn eine neue Maßnahme in Kraft getreten ist, die Kodierung dort von "0" auf "1" springt. Schematisch sehen die beiden Input-Versionen also wie folgt aus:

<i>Version I</i>	<i>Version II</i>
A B C D	A B C D
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Zur Konstruktion der Interventionsmodelle  $Y_t = f(A, B, C, D) + N_t$  benötigen wir noch ein Modell für die Noise-Komponente  $N_t$ . Dazu setzen wir das univariate ARIMA-Modell der  $\text{SO}_2$ -Reihe ein. Ein saisonales Moving-average-Modell  $(0,0,2)(0,1,1)_{12}$  bringt befriedigende Diagnose-Ergebnisse, so daß das Schätzmodell folgende Gestalt annimmt:

$$(31) \quad Y_t = \omega_1 A + \omega_2 B + \omega_3 C + \omega_4 D + \frac{(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)(1 - \theta_{12} B^{12})}{(1 - B^{12})} a_t$$

$$(1 - B^{12})Y_t = \omega_1 A(1 - B^{12}) + \omega_2 B(1 - B^{12}) + \omega_3 C(1 - B^{12}) + \omega_4 D(1 - B^{12})$$

$$+ (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)(1 - \theta_{12} B^{12}) a_t$$

Die Kodierung der binären Input-Variablen  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  erfolgt, wie oben erläutert, in zwei Versionen. In beiden führt die Modellschätzung ohne gleichzeitige Bestimmung der Ausreißereffekte zu nicht plausiblen Ergebnissen. In Version I erreichen die Maßnahmen "A" und "B" keine signifikanten Koeffizienten (*Student's t* < 1), während für "D" ein signifikant negativer und für "C" ein signifikant positiver Effekt, also ein Niveauanstieg, ausgewiesen wird. Dieses unplausible Ergebnis wird der Tendenz nach mit Version II bestätigt, indem für "B" und "D" signifikant negative und für "A" und "C" nicht-signifikante Koeffizienten ermittelt werden. Angesichts der dort vorgenommenen Kodierung würde dies bedeuten, daß während der Dauer von Maßnahme "C" der Immissionsgehalt wieder auf das Ausgangsniveau zurückgekehrt wäre, "C" also eine mit "B" bereits erreichte Senkung rückgängig gemacht hätte. Dagegen führt die simultane Schätzung der Modellparameter und der Ausreißereffekte (mit einem kritischen Wert von  $C = 3.0$ ) in beiden Modellversionen zum gleichen (plausiblen) Ergebnis: Lediglich für die Maßnahme "D" läßt sich eine signifikante Absenkung des Immissionsniveaus um (geschätzt)  $9.8 \mu\text{g}/\text{m}^3$  (*Student's t* = -5.74) nachweisen. Dabei zeigt sich, daß das Modell etwas besser angepaßt ist, wenn die Wirksamkeit der Maßnahme schon für Januar (statt März) 1986 angenommen wird (antizipatorischer Effekt).

Werfen wir noch einen Blick auf die identifizierten Ausreißer in Tabelle 3:

Tabelle 3:  
Identifizierte Ausreißer im Interventionsmodell  
der SO<sub>2</sub>-Immissionen

SUMMARY OF OUTLIER DETECTION AND ADJUSTMENT

	TIME	ESTIMATE	T-VALUE	TYPE
Jan 71	23	66.359	11.83	AO
Jan 72	35	-36.966	-6.54	AO
Jan 74	59	-21.770	-3.39	IO
Dec 74	70	-24.577	-3.93	IO
Jan 76	83	-18.265	-3.30	AO
Feb 77	96	-25.421	-4.05	IO
Feb 78	108	33.811	6.13	AO
Mar 79	121	-26.833	-4.27	IO
Dec 79	130	-28.139	-5.06	AO
Dec 80	142	31.737	5.69	AO
Aug 81	150	22.507	4.49	TC
Jan 82	155	51.841	9.14	AO
Dec 82	166	-18.265	-3.61	TC
Jan 84	179	-25.687	-4.02	IO
Jan 85	191	51.714	9.05	AO
Feb 86	204	60.934	9.68	IO
Jan 87	215	35.914	6.26	TC
Feb 87	216	-20.739	-3.13	IO
Jan 88	227	-17.176	-3.05	TC

Bei deren Interpretation muß beachtet werden, daß die Zeitreihe saisonal differenziert wurde. Ein positiver AO zum Zeitpunkt  $t=T$  in der Originalreihe  $\{Y_t\}$  muß in der saisonal differenzierten Reihe  $\{(1-B^{12})Y_t\}$  zu einem AO bei  $t=T$  und zu einem AO mit negativem Vorzeichen bei  $t = T+12$  führen - es sei denn, in der Originalreihe träte bei  $t = T+12$  erneut ein etwa größengleicher positiver AO auf. Beispiele für diese "Pärchenbildung" finden wir in Tab. 3 bei den Zeitpunkten 23 und 35 sowie 130 und 142. Die additiven Ausreißer bei den Zeitpunkten  $t = 23, 155, 191, 204$  markieren die außerordentlich hohen Saisonspitzen Jan. 71, Jan. 82, Jan. 85 und Febr. 86 (s. Abb. 6). Die relativ hohen Immissionswerte zwischen Mai und Sept. 1981 werden lediglich ab August ( $t=150$ ) mit einem TC registriert. Die relativ niedrigen Winterwerte 1982/83, Anfang 1984 und Anfang 1988 werden als TC ( $t=166$ ), IO ( $t=179$ ) und erneut TC ( $t=227$ ) identifiziert. Für ein saisonales Moving-average-Modell vom Typ  $(0,02)(0,1,2)_{12}$  impliziert ein IO eine Niveaushiftung alle 12 Monate mit einem zweimonatigen "Nachhall"; der TC impliziert ebenfalls einen sich alle 12 Monate wiederholenden Niveausprung, der sich geometrisch jeweils auf Null reduziert. Die automatische TC und IO-Identifikation ist also geeignet, längerfristige Änderungen der Saisonfigur im Modell zu berücksichtigen, während die Registrierung additiver Ausreißer punktuelle Abweichungen vom sai-

sonalen Verlauf registriert. Eine simultane Schätzung von Ausreißern und Modellparametern ist für saisonale Modelle besonders wichtig, wenn nicht erfaßte klimatische Schwankungen oder andere Ursachen fortlaufend zu Änderungen oder Störungen der Saisonfigur führen. (Noch besser wäre es natürlich, man könnte die externen Ursachen irregulärer saisonaler Verläufe explizit als determinierende Variablen in das Modell aufnehmen.)

## 8. Zusammenfassung und Diskussion

Im Rahmen des Box/Jenkins-Ansatzes werden "Ausreißer" als Konsequenzen unbekannter Ereignisse aufgefaßt, die einzelne oder längere Serien atypisch hoher oder niedriger Werte in einer Zeitreihe erzeugen. Sie stellen eine spezifische Form von Prozeß-Diskontinuitäten dar: mehr oder weniger abrupte, kurz- oder längerfristige Niveaushiftungen, die aber keine Änderung der in ARMA- oder ARIMA-Modellen formalisierten internen Abhängigkeitsstruktur des vorliegenden stochastischen Prozesses herbeiführen. Sie können mit Hilfe von Interventionsmodellen, wie sie vor allem *Box/Tiao* (1975) ausgearbeitet haben, in das ARMA- bzw. ARIMA-Modell integriert werden. Es bedarf einer solchen Modellierung (bzw. einer entsprechenden Adjustierung der beobachteten Zeitreihe), um die Gefahr von Fehlschlüssen über die Natur des die Zeitreihe erzeugenden Prozesses zu mindern.<sup>17</sup>

Ausreißer hinterlassen typen- und prozeßspezifische Spuren in den Residuen eines vorläufig angepaßten ARMA- bzw. ARIMA-Modells. Auf dieser Basis können sie mit Hilfe einfacher Regressionsmodelle identifiziert und geschätzt werden. Das Dilemma, Ausreißereffekte nicht ermitteln zu können, ohne ein Prozeßmodell vorzugeben; das Prozeßmodell aber (wahrscheinlich) nicht korrekt bestimmen zu können, ohne die Ausreißereffekte vorher identifiziert zu haben, macht ein iteratives Verfahren nötig, in dem Modellparameter und Ausreißereffekte Schritt für Schritt gemeinsam geschätzt werden.

Die von *Chen/Liu* (1990) vorgeschlagene Prozedur scheint in zweierlei Hinsicht recht effektiv zu sein: (1) Bei korrekt vorgegebener Modellstruktur werden die Modellparameter nach der Ausreißeradjustierung präzise geschätzt. (2) Gegenüber den Ad-hoc-Verfahren verbessert sie erheblich die Chance, ein falsch vorgegebenes durch ein korrektes Prozeßmodell ersetzen zu können. Hierzu ist es nötig, die aus einem ersten Durch-

---

<sup>17</sup> Man beachte, daß die statistische Zeitreihenanalyse (a) auf der Annahme beruht, daß ein Erzeugungsprozeß zumindest über einen gewissen Zeitraum relativ stabil ist und (b) mit dem Ziel betrieben wird, diese Prozeßstruktur unbeschadet kurzfristig wirksamer externer Einflüsse zu identifizieren. Diese externen Einflüsse werden nicht negiert oder für substantiell unwichtig erklärt, sondern spezifisch modelliert.

lauf des iterativen Schätzverfahrens resultierende ausreißerbereinigte Zeitreihe ebenso wie die entsprechenden Residuen daraufhin zu prüfen, ob sie ein Autokorrelationsmuster aufweisen, das auf eine andere als die bisher angenommene Prozeßstruktur schließen läßt. Das iterative Verfahren ist dann erneut auf der Basis der (evtl. mehrmals) geänderten Modellvorgabe anzuwenden. Es empfiehlt sich extreme, auch ohne formale Hilfsmittel leicht erkennbare Ausreißer schon vor der ersten Modellidentifikation durch ein Ad-hoc-Verfahren vorläufig anzupassen, um die empirische Autokorrelationsfunktion nicht zu sehr zu verzerren (Tsay 1986) - oder die AKF von vornherein mit einem "robusten" Verfahren zu schätzen (s. Schlittgen 1990). Im oben geschilderten Beispiel wurden die extremen saisonalen Spitzen im  $\text{SO}_2$ -Ausstoß (s. Abb. 6) zunächst durch das arithmetische Mittel der entsprechenden Monatswerte ersetzt, um auf dieser Basis das saisonale Modell zu identifizieren. Bei der simultanen Schätzung von Modellparametern und Ausreißereffekten wurde dagegen mit den Originalwerten gearbeitet.

Da sich multiple Ausreißereffekte untereinander und mit den regulären "random shocks" überlappen können, ist die korrekte Identifikation des spezifischen Ausreißertyps und des genauen Interventionszeitpunkts nicht sichergestellt. (Das muß, wie wir sahen, die korrekte Identifikation und Parameterschätzung des Prozeßmodells nicht verhindern.) Wenn man an einer substantiellen Interpretation der Ausreißer interessiert ist, sollte man die "automatische" Identifikation durch das Chen/Liu-Verfahren mit einem expliziten Interventionsmodell überprüfen (gemäß den Gleichungen (14) - (17)). Problematisch wird es vor allem, wenn mehrere Ausreißer unmittelbar aufeinanderfolgen, beispielsweise in Form eines "Blockshifts" {...000111110000...}. Das sei kurz illustriert, indem wir in den simulierten MA(1)-Prozeß des obigen Anwendungsbeispiels (s. Abb. 3) eine Folge von fünf additiven Ausreißern mit einem Effekt von jeweils  $\omega = 3.5$  bei den Zeitpunkten  $t = 46, 47, 48, 49, 50$  einbauen (ohne weitere Ausreißer). Dieser Block verzerrt die empirische AKF so weit, daß die MA(1)-Struktur in ihr nicht mehr erkennbar ist, das Muster eher dem des "weißen Rauschens" ähnelt. Wenn wir die Chen/Liu-Schätzprozedur mit dieser Modellvorgabe anwenden, wird ein einzelner TC-Ausreißer mit  $\hat{\omega} = 5.5$  bei  $t=46$  identifiziert. Immerhin wird im AKF-Muster der entsprechend adjustierten Reihe die MA(1)-Struktur des Prozesses wieder sichtbar. Mit dieser (korrekten) Modellvorgabe werden zwei TC-Ausreißer mit  $\hat{\omega} = 6.5$  (bei  $t=47$ ) und  $\hat{\omega} = -1.5$  (bei  $t=52$ ) identifiziert, und der Modellparameter  $\theta = 0.7$  wird mit  $\hat{\theta} = 0.62$  noch recht gut geschätzt. Bei anderen Prozessen, weiteren Ausreißern und veränderten Blocklängen, können die Ergebnisse allerdings auch ungünstiger ausfallen. Es ist leicht nachvollziehbar, daß eine Folge von additiven Ausreißern im Sinne des Blockshifts zunächst (bis zum Ende des Blocks) in den Residuen ein Effekt-Muster erzeugt, das dem des Level-Shift, nach dem Blockende dem des AO entspricht. Exakt modellieren im Sinne der Regressionsgleichung (24) ließe sich dieses Muster aber nur, kennte man die Blocklänge, doch dann benötigte man auch keine Suchstrategie mehr.



Hinzuweisen ist noch auf das Problem zeitlich instabiler Varianzen, das im Gegensatz zu den niveaubehängigen Varianzveränderungen in der Forschungspraxis bisher wohl zu wenig beachtet worden ist. *Tsay* (1988: 16) macht darauf aufmerksam, daß nicht modellierte Varianzänderungen als Ausreißer erscheinen können. Er hat ein Konzept ausgearbeitet, das diese beiden Formen von Strukturbrüchen in einem einheitlichen Bezugsrahmen darstellbar macht, was aber im Rahmen dieses Artikels nicht mehr zu behandeln ist.

#### Literatur

*Box, G. E. P./Jenkins, G. M.*, 1976: Time series analysis: Forecasting and control, San Francisco etc.: Holden-Day.

*Box, G. E. P./Tiao, G. C.*, 1975: Intervention analysis with application to economic and environmental problems. *Journal of the American Statistical Association* 70: 70 - 79.

*Chang, I./Tiao, G. C.*, 1983: Estimation of time series parameters in the presence of outliers. Technical Report No. 8, Graduate School of Business, University of Chicago.

*Chang, I./Tiao, G. C./Chen, C.*, 1988: Estimation of time series parameters in the presence of outliers. *Technometrics* 30: 193 - 204.

*Chen, C./Liu, L.-M.*, 1990: Joint estimation of model parameters and outlier effects in time series. Working Paper Series, Scientific Computing Associates, P. O. Box 625, DeKalb, Illinois 60115, USA.

*Chen, C./Liu, L.-M./Hudak, G. B.*, 1990: Outlier detection and adjustment in time series modelling and forecasting. Working Paper Series, Scientific Computing Associates, P. O. Box 625, DeKalb, Illinois 60115, USA.

*Chen, C./Tiao, G. C.*, 1990: Random level-shift time series models, ARIMA approximations, and level-shift detection. *Journal of Business & Economic Statistics* 8: 83 - 97.

*Liu, L.-M./Chen, C.*, 1990: Recent developments of time series analysis in environmental impact studies. Working Paper Series, Scientific Computing Associates, P. O. Box 625, DeKalb, Illinois 60115, USA.

*Liu, L.-M./Hudak, G. B.* in collaboration with *G. E. P. Box, M. E. Muller, G. C. Tiao*, 1986: The SCA statistical system: Reference manual for forecasting and time series analysis. DeKalb, Illinois: Scientific Computing Associates.

*McCleary, R./Hay, R. A.*, 1980: Applied time series analysis for the social sciences, Beverly Hills, London: Sage.

*Schlittgen, R.*, 1990: Robuste Glättung von Zeitreihen. Allgemeines Statistisches Archiv 74: 223 - 250.

*Schlittgen, R./Streitberg, B.*, 1984: Zeitreihenanalyse, München/Wien: Oldenbourg.

*Schmitz, B.*, 1989: Einführung in die Zeitreihenanalyse. Modelle, Softwarebeschreibung, Anwendungen, Bern, Stuttgart, Toronto: Huber.

*Stier, W.*, 1992: Multivariate Zeitreihenanalyse. Skript zum Frühjahrsseminar 1992 des Zentralarchivs für empirische Sozialforschung.

*Thome, H.*, 1992: Regressionsanalyse mit Zeitreihendaten: Zur Interpretation dynamischer Modelle. ZA-Information 30: 80-111.

*Tiao, G. C.*, 1985: Autoregressive moving average models, intervention problems and outlier detection in time series, S. 85 - 118 in: *E. J. Hannan/P. R. Krishnaiah/M. M. Rao* (Hrsg.), Handbook of Statistics, Vol. 5, Elsevier Science.

*Tsay, R. S.*, 1986: Time series model specification in the presence of outliers. Journal of the American Statistical Association 81: 132 - 141.

*Tsay, R. S.*, 1988: Outliers, level shifts, and variance changes in time series. Journal of Forecasting 7: 1 - 20.

*Vandaele, W.*, 1983: Applied time series and Box-Jenkins models, New York: Academic Press.

*Wei, W. W. S.*, 1990: Time series analysis. Univariate and multivariate methods, Redwood City etc.: Addison-Wesley.

*Widmer, Th.*, Evaluation von Massnahmen zur Luftreinhaltepolitik in der Schweiz. Eine quasi-experimentelle Interventionsanalyse nach dem Ansatz Box/Tiao, Chur/Zürich: Rüegger.