

Intendierte und nicht intendierte Folgen von Bildungspolitik: eine Simulationsstudie über die sozialstrukturellen Grenzen politischer Einflussnahme

Müller-Benedict, Volker

Veröffentlichungsversion / Published Version

Sammelwerksbeitrag / collection article

Empfohlene Zitierung / Suggested Citation:

Müller-Benedict, V. (2006). Intendierte und nicht intendierte Folgen von Bildungspolitik: eine Simulationsstudie über die sozialstrukturellen Grenzen politischer Einflussnahme. In K.-S. Rehberg (Hrsg.), *Soziale Ungleichheit, kulturelle Unterschiede: Verhandlungen des 32. Kongresses der Deutschen Gesellschaft für Soziologie in München. Teilbd. 1 und 2* (S. 2200-2232). Frankfurt am Main: Campus Verl. <https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0168-ssoar-143900>

Nutzungsbedingungen:

Dieser Text wird unter einer Deposit-Lizenz (Keine Weiterverbreitung - keine Bearbeitung) zur Verfügung gestellt. Gewährt wird ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht-kommerziellen Gebrauch bestimmt. Auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments müssen alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten werden. Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgendeiner Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Mit der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use:

This document is made available under Deposit Licence (No Redistribution - no modifications). We grant a non-exclusive, non-transferable, individual and limited right to using this document. This document is solely intended for your personal, non-commercial use. All of the copies of this documents must retain all copyright information and other information regarding legal protection. You are not allowed to alter this document in any way, to copy it for public or commercial purposes, to exhibit the document in public, to perform, distribute or otherwise use the document in public.

By using this particular document, you accept the above-stated conditions of use.

Intendierte und nicht intendierte Folgen von Bildungspolitik

Eine Simulationsstudie über die sozialstrukturellen Grenzen politischer Einflussnahme¹

Volker Müller-Benedict

1. Bildungspolitik nach PISA

Bildungspolitik gleich welcher Partei verfolgt Ziele, die sich in ihrer Reichweite unterscheiden. So werden nach der PISA-Studie elf Milliarden Euro bereitgestellt, um viele Schulen in Ganztagschulen umwandeln zu können, weil nach PISA-Bewertung erfolgreichere Länder Ganztagsunterricht haben (Koalitionsvereinbarung SPD/Grüne nach der Wahl Sept. 2002, *taz* vom 10. Februar 2003). Das Ziel, die Zahl der Ganztagschulen zu vermehren, wird sicherlich erreicht werden. Ob dadurch das weiter gehende Ziel, in der nächsten Ländervergleichsstudie besser abzuschneiden, erreicht wird, ist nicht sicher, weil der Wirkungszusammenhang zwischen der Länge eines Schultags und den Schulleistungen nicht genau bekannt ist. Genauer besteht gar kein direkter Zusammenhang, sondern es ist eine ganze Wirkungskette, deren einzelne Glieder bekannt sein müssten, zum Beispiel längerer Aufenthalt in der Schule führt zu mehr Zeit zum Lernen; mehr Zeit zum Lernen wird auch immer zum Lernen genutzt; das heißt auch die Lehrer bereiten sich mehr vor, bringen mehr Stoff, fördern mehr etc.; mehr Lernen führt zu besseren Leistungen in Tests wie dem PISA-Test. Oder: längerer Aufenthalt in der Schule führt zu mehr Zusammensein von Kindern aus Ausländer- und sozial schwächeren Familien mit anderen Kindern und zu weniger Einfluss ihrer Familien; das führt zu mehr Lernmotivation bei diesen Kindern; das führt dazu, dass intelligente Kinder aus diesen Familien ihre Fähigkeiten in der Schule mehr zeigen; das führt dazu, dass die Lernleistungen der Klassen insgesamt besser werden; dadurch schneiden sie beim nächsten Test besser ab. An jede dieser nun schon etwas direkteren Zusammenhänge kann man Fragezeichen setzen. So wird zum Beispiel der letzte Zusammenhang zwischen besserer Lernleistung und besserem Abschneiden beim

¹ Dieser Beitrag ist inzwischen veröffentlicht in: Becker, Rolf/Lautenbach, Wolfgang (Hg.) (2004), *Bildung als Privileg? Erklärungen und Befunde zu den Ursachen der Bildungsungleichheit*, Wiesbaden.

Test bezweifelt, wenn behauptet wird, der deutsche Unterricht würde die Schüler in Fähigkeiten ausbilden, etwa literarischen, musischen, philologischen oder sozialen, die beim PISA-Test nutzlos waren, bei dem vornehmlich interpretative oder kombinatorische Fähigkeiten gefragt waren. Wenn ein Zusammenhang über eine Wirkungskette besteht, muss nur ein Glied in der Kette nicht die richtige Wirkung zeigen, und die Gesamtwirkung besteht nicht. So wird als noch weiter gehendes Ziel nach der PISA-Studie ja deshalb das Bildungssystem reformiert, damit Deutschland als Wirtschaftsstandort attraktiv bleibt und seine wirtschaftliche Position in der Welt und seine sozialen Standards halten kann. Dieser Zusammenhang zwischen verbesserter Bildung der Bevölkerung und wirtschaftlicher und sozialer Verbesserung wurde auch angenommen, als die weitreichenden Bildungsreformen ab Ende der 60er Jahre durchgeführt wurden. Man könnte sagen, dass hier der erste Teil der Wirkungskette, die Verbesserung der Bildung, bis heute gelungen ist, dass aber der zweite Teil, eine Verbesserung der wirtschaftlichen Situation und der sozialen Lagen, eher fraglich ist (Müller 1998).

Bildungspolitik wirkt oft nur in die ersten Teile einer Wirkungskette hinein und hofft, dass sich die Wirkung in die weiteren Schritte fortsetzt. Diese weiteren Schritte erfolgen jedoch in bestimmten vorgegebenen Strukturen, sei es zunächst des Bildungssystems selbst, oder weiter dann anderer gesellschaftlicher Subsysteme. So kann man als ein mögliches Ziel versuchen, die Zahl der Abiturienten zu erhöhen, aber ob sich dadurch auch automatisch die Zahl der Studierenden erhöhen wird, ist nicht sicher. Es könnte sogar die nicht intendierte Folge eintreten, dass sich dadurch die Ausbildungsvoraussetzung in einigen mittleren Berufen wie Bankwesen erhöhen, die nunmehr nur noch von Abiturienten ausgeführt werden. Welche Folge eintritt, ist unter anderem abhängig von der zur Verfügung stehenden Zahl an Studienplätzen und dem Angebot an Ausbildungsplätzen in diesen mittleren Berufen, also von Größen, die durch die Struktur der Hochschulen und Berufe limitiert sind.

In diesem Beitrag geht es darum, theoretisch mit Hilfe eines Simulationsmodells zu analysieren, wie einige limitierende Strukturen des Bildungssystems wirken, wenn bildungspolitische Maßnahmen zur Steigerung der Leistungen des Bildungssystems durchgeführt werden. Es geht also um logisch herleitbare strukturelle Einflüsse und Grenzen von Bildungspolitik, bzw. anders herum gesehen, um die Spielräume und Möglichkeiten der Politik innerhalb der strukturellen Gegebenheiten.

Bildungspolitik kann an sehr unterschiedlichen Punkten ansetzen. Gefordert nach PISA (Fahrholz/Gabriel/Müller 2002) wurden unter anderem

- organisatorische und gesetzliche Rahmenbedingungen, die wirtschaftliche Ziele ins Bildungssystem einführen wollen, wie »mehr Wettbewerb« und »mehr Autonomie« unter den Institutionen,

- strukturelle Änderungen, wie mehr (im Hinblick auf die besten Länder bei PISA) oder aber weniger Integration (so die CDU Niedersachsen nach der Wahl Februar 2003, im Hinblick auf Bayerns Ergebnisse im innerdeutschen Vergleich) der drei »Säulen« Haupt-, Realschule und Gymnasium des spezifischen deutschen Systems, oder die Einführung von Ganztagschulen,
- Maßnahmen, die auf den Unterricht zielen, den »Kern« des Systems, und dort meist an spezifischen Teilgruppen der Schülerschaft wie ausländischen Kindern, Hochbegabten oder anderen ansetzen und durch gezielte Förderungen deren Kompetenzen erhöhen sollen.

In diesem Beitrag werden nur die letzten beiden bildungspolitischen Vorstellungen einbezogen. Die ersten Forderungen nach mehr wirtschaftlichen Gesichtspunkten sind erst in neuerer Zeit Forschungsgegenstand und etwa in Böttcher/Weishaupt/Weiß 1997 dargestellt. In Bezug auf den letzten Punkt der spezifischen Fördermaßnahmen existiert in der Bildungspolitik seit jeher der Gegensatz zwischen »konservativen« und »reformerischen« Vorstellungen. Sie lassen sich dadurch charakterisieren, dass

- die »konservativen« weniger an den sozialen Voraussetzungen der Schüler ansetzen möchten, sondern den Gesichtspunkt der Belohnung und Förderung von Leistung und die Bildung von Eliten in den Vordergrund stellen, während
- die »reformerischen« eher daran denken, schon in der vorschulischen Phase entstandene und sich durch die familiären Bedingungen reproduzierende Bildungshemmnisse zu beseitigen und durch die Entfaltung von »Begabungsreserven« spezieller sozialer Schichten zu besseren Leistungen des Bildungssystems zu gelangen.

In tagespolitischen Äußerungen lassen sich beide Gesichtspunkte oft nicht einfach voneinander trennen. Für den folgenden Beitrag ist es jedoch anschaulicher, wenn sie wie hier formuliert als Gegensätze angenommen werden. Aber auch in Bezug auf konkrete Maßnahmen kann man den Unterschied zum Teil genau erkennen, etwa wenn Vorschulen gestrichen werden (konservativ) oder Ausländerförderung (reformerisch) eingerichtet wird.

2. Ein Modell der kollektiven Schullaufbahnen

Um die Auswirkungen politischer Maßnahmen auf das Schulsystem absehen zu können, soll im Folgenden mit einem Modell gearbeitet werden. Modelle sind vereinfachte Darstellungen der Realität, die oft extra mit dem Ziel konstruiert werden,

dass sie die Wirkung ganz bestimmter hypothetischer Einflüsse testen können. Die Möglichkeit echter Experimente in der sozialen Wirklichkeit ist beschränkt, zum einen, weil viele zusätzliche Einflussfaktoren nicht einfach abgeschaltet werden können und deshalb die kausale Zurechnung der Wirkung unklar bleibt, und zweitens, weil sie zu viele, und nicht nur finanzielle Kosten verursachen. Das Schulsystem Deutschlands kann nicht insgesamt Experimenten darüber ausgesetzt werden, welche Maßnahmen etwa nach PISA am erfolgreichsten sind, denn ein Scheitern dieser Experimente würde einer ganzen Schülergeneration eine erfolgreiche Ausbildung verwehren. Deshalb sind Modelle besonders auch in den Sozialwissenschaften eine elegante Methode, die Wirkung von Maßnahmen theoretisch abzuschätzen.

Um Wirkungen schätzen zu können, muss allerdings der Wirkungsmechanismus bekannt sein, mit anderen Worten eine bestätigte Theorie existieren, die den heutigen Zustand als Folge bestimmter Voraussetzungen erklären kann. Wie die obigen Ausführungen aber zeigen, gibt es im Allgemeinen in der Realität, etwa im Schulalltag, zu viele Einflüsse auf die Resultate, deren komplexe Wechselwirkung vielfach auch nicht hinreichend bekannt ist, um sie in einem Modell alle miteinander abbilden zu können. Man spricht deshalb vom Problem der »abnehmenden Abstraktion« (Esser 1993: 133f.). Das bedeutet, dass ein Modell, oder auch eine Theorie, einerseits von der komplexen Realität notwendigerweise abstrahieren muss, um zu nachvollziehbaren Aussagen über Wirkungen zu kommen, deshalb die Wirklichkeit nur vereinfacht abbilden kann. Der Grad der Abstraktion von der Realität muss also notwendigerweise abnehmen. Andererseits darf ein Modell auch nicht so einfach sein, dass es wesentliche Bedingungen nicht widerspiegelt. Das Problem besteht darin, das richtige Maß an Abstraktion für ein Modell zu finden. Festzuhalten ist aber aus dieser Betrachtung, dass die beiden geläufigsten Gegenargumente gegen Modelle, nämlich: »da fehlt ja noch der Einfluss XY« oder »aus dem Modell kann man ja alles Mögliche ableiten«, das Problem der abnehmenden Abstraktion nicht erkannt haben, weil ein Modell weder die Realität 1:1 abbilden möchte noch in seinen Ergebnissen auf bekannte Entwicklungen beschränkt sein sollte. Es muss daran gemessen werden, inwieweit es bestimmte theoretisch begründete Wirkungszusammenhänge nachvollziehbar darstellen kann und daraus Folgerungen ableiten kann, die auf die tatsächlichen Verhältnisse bezogen werden können.

Im Brennpunkt des folgenden Modells steht die Frage, wie politische Maßnahmen zur Steigerung der Leistungen des Bildungssystems ihre Wirkungen entfalten können. Politische Maßnahmen können im Modell nur darin bestehen, entweder Strukturen des Bildungssystems zu verändern oder bestimmte pädagogische Tätigkeiten innerhalb des Systems zu verändern. Im zweiten Fall zielen die Maßnahmen auf ausgewählte Teile der Schülerschaft, die besonderen Einflussfaktoren unterliegen.

Wie sehr differenziert und detailliert diese beide Bereiche, Strukturen des Bildungssystems und persönliche Gegebenheiten jedes Schülers, inzwischen in der aktuellen Forschung beschrieben werden, kann man an der Vielzahl der in die PISA-Studie aufgenommenen Indikatoren ablesen. Wie kann nun diese Vielzahl von Dimensionen »vereinfacht« dargestellt werden, um in einem Modell Wirkungen von politischen Maßnahmen abschätzen zu können? Das Modell muss erstens die wesentlichen strukturellen Bedingungen darstellen. Zweitens muss die Vielzahl der Einflussfaktoren auf einige zentrale reduziert werden, die zudem als durch politische Maßnahmen beeinflussbar angesehen werden können.

2.1 Die Struktur des Bildungssystems im Modell

Die wesentlichen strukturellen Vorgaben bestehen darin, dass schulische Ausbildung immer in Stufen vor sich geht: der Lernstoff wird in Teile aufgeteilt, die in einer bestimmten notwendigen Reihenfolge gelernt werden müssen, weil sie aufeinander aufbauen. Ein Schulsystem ist deshalb notwendigerweise in verschiedene Schulstufen eingeteilt wie eine Kaskade, das heißt die Schüler müssen, um ganz hindurchzugelangen, eine Stufe nach der anderen bewältigen. Dabei besteht auf vielen Stufen die Gelegenheit, die Schule abzubrechen und sich mit dem so weit erreichten Abschluss zufrieden zu geben². In Ländern mit allgemeiner Schulpflicht ist klar, dass auf der untersten Stufe alle Kinder in das System eintreten. Ebenso klar ist, dass auf der obersten Stufe – sei es Hochschulausbildung oder Abitur oder ähnliches – nicht alle ankommen können, da ein Ziel des Systems ebenfalls ist, die Fähigsten für die anspruchsvollste, das heißt längste, Ausbildung auszuwählen. Damit werden die Schwund- bzw. Erfolgsquoten auf den Stufen des Systems zu seinem entscheidenden Charakteristikum.

Diese Art Modellierung des Schulsystems ist auch die Grundlage der gängigen Prognosemodelle der Schülerpopulation (z.B. Klemm 1992, KMK 1993). Dabei werden die Übergangsquoten aus der jüngsten Vergangenheit geschätzt und die Eingangspopulation der Erstklässler aus demografischen Daten übernommen. Sie bildet zudem wichtige Erkenntnisse der Schulerfolgssforschung ab (Müller/Haun 1993, 1994; Mare 1980, 1981). Nach diesen Ergebnissen lassen sich die Schulstufen auch als wichtige Entscheidungsstellen charakterisieren, an denen die Eltern aktiv Entscheidungen über den weiteren Verbleib ihrer Kinder fällen. Dabei können sowohl die ökonomischen und sozialen Bedingungen und Gewohnheiten als auch eine rationale Abwägung der weiteren Erfolgchancen und der dafür aufzubrin-

2 Auf jeder Stufe fließt also eine gewisse Anzahl aus dem System heraus, deshalb ist auch der Name »leaky pipeline« dafür bekannt.

genden Kosten, zum Beispiel in Form von weiterem Unterhalt des Kindes, eine Rolle spielen (Cortina 2003). In dieser Sicht wären die Übergänge auf einer Stufe nicht als Schwundquote, sondern als Verbleibsentscheidungsquote zu bezeichnen.

Die Anzahl der Schulstufen sei im Folgenden n , wobei 1 die niedrigste und n die höchste sei, die Anzahl der Schüler auf den Stufen sei mit S_i bezeichnet ($i = 1, \dots, n$) und die Übergangswahrscheinlichkeiten von Stufe i zu Stufe $i+1$, das heißt der Anteil derjenigen, der nicht das System verlässt, mit p_i . Eine mögliche Aufgabe von Schulpolitik, möglichst viele Hoch- und gut Qualifizierte auf den Arbeitsmarkt zu entlassen, kann mit diesen Definitionen beschrieben werden als die Aufgabe, die S_i mit den hohen i 's, zum Beispiel S_n , möglichst groß zu machen. Da aber gilt $S_{i+1} = S_i \cdot p_i$, kann S_n nur gesteigert werden durch Steigerung mindestens eines der p_i 's. Schon hier stellt sich eine einfache Frage für die Wirkung unterschiedlicher politischer Maßnahmen: gibt es ein p_i , das für die Steigerung von S_n die größte Wirkung verspricht, oder muss man alle p_i 's steigern oder eine Kombination?

2.2 Die Einflussfaktoren der individuellen Schülerleistung

Aber wie kann man überhaupt die Übergangswahrscheinlichkeiten p_i steigern? Hier kommen nun im Wesentlichen drei Theorien zum Zuge, die verschiedene Einflussfaktoren hervorheben, warum Schüler eine bestimmte Klassenstufe nicht mehr bewältigen. Da sich die Größe der p_i ja als Summe individueller Schülerleistungen ergibt, können es erstens persönliche Schülerfähigkeiten sein, die die p_i bestimmen, etwa Begabungen und Anlagen. Die eher statischen Begabungstheorien (Weiss 2000) schreiben jedem einzelnen Schüler eine individuelle Begabung zu, die durch seine körperliche Ausstattung bedingt und wenig veränderbar sei. Sie stattet ihn mit einer konstanten Erfolgswahrscheinlichkeit p aus, in der Schule auf die nächste Stufe weiterzukommen. Wie wäre der Schulerfolg beschreibbar, wenn statische Begabungen vorlägen? Sei B die Zahl der Schüler mit der Begabung p auf Stufe S_1 . Dann ist der Anteil Schüler von B , die nach dieser Theorie die Stufe S_2 erreichen, gleich $B \cdot p$ und der Anteil, der die höchste Stufe S_n erreicht, im Modell $B \cdot p^{n-1}$. Um den Erfolg des Schulsystems insgesamt zu beschreiben, reicht es deshalb in diesem Fall, die Verteilung der Begabungen unter den Erstklässlern zu kennen³, das Schulsystem selbst spielt keine Rolle mehr, Schulpolitik wäre machtlos, weil p nicht veränderbar wäre.

³ Begabungstheorien kommen meist in komplexerem Gewand daher, indem sie Normalverteilungen der Begabungen mit verschiedenen Mittelwerten für die sozialen Schichten annehmen und damit dann rechtfertigen, dass bei den höheren Bildungsabschlüssen die hohen sozialen Schichten deutlich mehr vertreten sind (Weiss 2000). Man sieht am Modell, dass es so einfach nicht sein kann.

Andere Theorien heben zweitens die Schulform, die Form des Unterrichts oder andere Bedingungen hervor, die innerhalb der Handlungsmöglichkeiten der Schule liegen. Die p_i 's wären abhängig von diesen Bedingungen, zum Beispiel höhere p_i 's für Gymnasien als für Gesamtschulen oder umgekehrt, wie man oft in der politischen Diskussion hören kann. Dann hätte die Schulpolitik große Verantwortung.

Weitere Theorien heben drittens einschränkend vor allem die Rolle der Familien hervor, die als primäre Sozialisations- und Entscheidungsinstanz für das Kind sowohl seine Motivation für Schule als auch seine Entscheidungen über den Verbleib auf den Schulstufen entscheidend beeinflusst. Die Erfolgswahrscheinlichkeit p , eine Schulstufe weiterzukommen, wäre dann abhängig von der Familie des Schülers, die unter anderem mitentscheidet, wann das Kind die Schule verlässt. Nach dieser Theorie wären Handlungsmöglichkeiten für Schulpolitik vorhanden, aber eher klein: sie müsste in die Familien hineinwirken und in der Schule dem Kind andere als die familiären Werte vermitteln.

Um das Modell weiter zu konstruieren, ist es nicht nötig, sich auf eine dieser Theorierichtungen zu beschränken. Um überhaupt Aussagen über Schulpolitik machen zu können, müssen natürlich reine Begabungstheorien ausgeschlossen werden. Die anderen beiden Faktoren werden auf die Weise ins Modell integriert, dass für schulische Maßnahmen zwei Ansatzpunkte bei den Kindern gesehen werden: sie können zum einen die Erfolgswahrscheinlichkeit steigern, indem sie pädagogisch auf die familiären Hintergründe der Kinder einwirken. Zum anderen können sie direkt durch geeignete Unterrichtsformen an den kognitiven Fähigkeiten der Kinder ansetzen.

Im schulischen Alltag wird man diese Unterscheidung oft nicht genau treffen können. In den Empfehlungen der PISA-Studie etwa wird jedoch dazwischen genau unterschieden, wenn festgestellt wird: »Eine Optimierung beider Gesichtspunkte – Sicherung eines hohen Kompetenzniveaus und Verminderung sozialer Disparitäten – hängt maßgeblich vom Erreichen eines befriedigenden Niveaus der Lesekompetenz in den *unteren* Sozialschichten ab« (PISA-Konsortium 2001: 389). Hier wird eine schichtspezifische Förderung nahegelegt. Oder wenn es an anderer Stelle heißt: »Der hohe Erklärungswert von veränderbaren Faktoren (Lernstrategiewissen, Interesse am Lesen, inhaltliches Interesse) (...) bedeutet, dass Schülerinnen und Schüler mit hohem Lernstrategiewissen (...) höhere Werte im Lesekompetenztest erzielen. Diese Befunde weisen auf wichtige Bereiche der Förderung hin« (PISA-Konsortium 2001: 131). Hier wird eine Förderung individueller Schülerfähigkeiten nahegelegt. Auch die politischen Maßnahmen unterscheiden zwischen diesen beiden Faktoren. So gibt es in Berlin bereits Sprachtests von Kindern und vom Ergebnis abhängige Maßnahmen, um die Sprachfähigkeit überhaupt so weit herzustellen, dass dem normalen Unterricht gefolgt werden kann, oder Vorschläge zur Aufhebung der Jahrgangsklassen – Einteilung für die ersten zwei bis drei Schuljahre – eine offenbar

kompensatorische sozialschichtbezogene Maßnahme. Durchgeführt werden aber auch besondere Differenzierungen für Hochbegabte, also eine auf die individuellen kindlichen Fähigkeiten zielende Maßnahme.

Um die Unterschiede in den Familien der Schüler zu modellieren, wird die soziale Schichtzugehörigkeit als Indikator gewählt (PISA-Konsortium 2001: Kap. 8). Wie immer man »soziale Schicht« definiert, bestätigen viele Untersuchungen, dass das Aspirationsniveau, die Ansprüche an die schulischen Leistungen des Kindes, in Arbeiter- und Kleinbürgerfamilien niedriger als in Mittel- und gehobenen Schichten sind. Auch die finanzielle Belastung, die eine lange Schulkarriere bedeutet, unter anderem dadurch, dass das Kind noch kein eigenes Einkommen erzielt, kann von den oberen sozialen Schichten besser getragen werden. Im Modell seien die sozialen Schichten mit C_i (»class« C) bezeichnet und eine kleine Anzahl Schichten mit ordinaler Reihenfolge angenommen, das heißt C_{i+1} ist eine höhere Schicht als C_i .

Die Anlagen der Kinder seien ebenfalls nur in einer kleinen Anzahl Stufen differenzierbar. Das kann etwa im Hinblick auf die beschränkte Möglichkeit, Unterricht schulintern nach »Talenten« zu differenzieren, gerechtfertigt werden. Sie werden mit R_k (»resources« R) bezeichnet und R_k bezeichne eine geringere Begabung als R_{k+1} . In jeder sozialen Schicht gebe es Kinder aller Begabungen. Die Verteilung der Begabungen auf die Schichten ist natürlich eine kritische Größe des Modells, die die Wirkung von Maßnahmen beeinflusst. Deshalb wird sie im Modell variabel gehalten.

Die schulischen Maßnahmen verändern die Einflüsse, die die beiden Faktoren soziale Schicht und Begabung auf den Schulerfolg der Kinder haben. Deshalb wird die Erfolgswahrscheinlichkeit p eines Kindes, die nächste Schulstufe zu erreichen, generell abhängig von C und B modelliert:

$$p_{jk} = f(C_j, B_k)$$

Damit ist ein individuelles Kind nur durch diese zwei Merkmale – seine »Anlagen« und seine soziale Herkunft – definiert. Natürlich ließen sich an dieser Stelle weitere Merkmale hinzufügen, um das Modell »realistischer« zu gestalten. Die Zunahme an Komplexität ist jedoch gegen die Transparenz der Simulation abzuwägen; da viele vorstellbare weitere Merkmale ebenfalls unter die beiden aufgenommen Faktoren subsummiert werden können, soll es hier dabei bleiben. Schulische Maßnahmen können sich deshalb in diesem Modell im differenziertesten Fall auf eine spezifische Begabungsuntergruppe einer speziellen Schicht beschränken, etwa auf die Förderung der Hochbegabten der Unterschicht. Die Wirkung schulischer Maßnahmen besteht im Modell in der Veränderung des Werts der Erfolgsquoten p_{jk} . Das bedeutet, sie werden gemessen durch die Erhöhung oder Verminderung der Übergangsquoten in die nächste Schulstufe.

Die p_{jk} heißen nach Boudon (1973), von dem die Grundlage zu diesem Modell stammt, »Fundamentalparameter«, da sie die Grundlage für die schulische Erfolgs-

prognose eines Kindes geben, dessen Familie und kognitive Ausstattung bekannt ist. Die Fundamentalparameter bleiben dieselben auf jeder Stufe des Bildungssystems. Das ist eine vereinfachende Annahme. Tatsächlich etwa verliert sich der Einfluss der sozialen Herkunft auf den höheren Stufen im amerikanischen System (Mare), während es zum deutschen System widersprüchliche Ergebnisse dazu gibt (Müller/Haun 1994, PISA-Konsortium 2001). Da die Änderungen der p_{jk} jedoch in spezifischen fixen Verhältnissen pro Schulstufe vorkommen, würden wesentliche qualitative Ergebnisse, die durch die Änderung eines einzigen Fundamentalparameter erzeugt werden, sich auch bei einem komplizierteren, aber aus konstanten Relationen zum Fundamentalparameter bestehenden System von Übergangsquoten zeigen. Deshalb wird das Modell im Sinn der Modellökonomie auf einen Satz von Fundamentalparametern beschränkt.

Damit sind die wesentlichen Elemente des Modells bestimmt: Es besteht aus den n Stufen des Bildungssystem S_i ($1 \leq i \leq n$), der Aufteilung der Schülerpopulation nach den Merkmalen soziale Schicht C_j und individuelle Begabung R_k und den Erfolgswahrscheinlichkeiten p_{jk} je nach Schichtzugehörigkeit und Begabung. Als erstes Beispiel sei der Schulerfolg von $C_j R_k = 10.000$ Kindern aus Schicht C_j mit Begabung R_k bei fünf Schulstufen, die etwa Hauptschule, Realschule, Abitur, Fachhochschule, Universität heißen könnten, berechnet. Er ergibt sich in allgemeinen Formeln aus ihrer Erfolgswahrscheinlichkeit p_{jk} :

$$S_1 = 10.000 \cdot (1-p_{jk}), S_2 = S_1 \cdot p_{jk} = 10.000 \cdot (1-p_{jk}) \cdot p_{jk}, S_3 = 10.000 \cdot (1-p_{jk}) \cdot p_{jk}^2, S_4 = 10.000 \cdot (1-p_{jk}) \cdot p_{jk}^3, S_5 = 10.000 \cdot p_{jk}^4,$$

$$\text{allgemein: } S_j = C_j R_k \cdot (1-p_{jk}) \cdot p_{jk}^{(j-1)} \text{ für } j < n, S_n = C_j R_k \cdot p_{jk}^{(n-1)}.$$

Schon aus diesen Formeln wird ersichtlich, dass es sich bei Abschätzung der Konsequenzen von Änderungen der p_{jk} 's nicht um ein triviales Unterfangen handelt, insbesondere wenn Änderungsraten von Quoten verglichen werden sollen, da es sich offenbar um ein nichtlineares System handelt. Die Komplexität dieses Modells ist unter anderem von Fararo/Kosaka (1978) mathematisch umfassend dargelegt worden, deren Ergebnisse hier zum Teil herangezogen werden. Da die rein analytische Durchdringung in die höhere Mathematik führt, wird das Modell hier auf dem Weg der Simulation durchgerechnet.

3. Ziele und Ausgangsbedingungen des Modells

Um Simulationen mit einem Modell berechnen zu können, müssen die Modellparameter mit konkreten Zahlen belegt werden. Für die Auswahl ihrer Werte gilt dasselbe wie beim Problem der abnehmenden Abstraktion: es ist nicht zu erwarten und auch nicht wichtig, dass sie genau mit empirisch ermittelbaren Werten überein-

stimmen, da die realen Werte immer auch einen Großteil an Komplexität widerspiegeln, der im Modell gar nicht vorhanden ist. Wichtig ist, dass die Parameter und vor allem die Ergebnisse der Simulation im Rahmen möglicher, vorstellbarer Realität bleiben. Nur ein Modell, das überwiegend unmögliche oder unvorstellbare Zustände erzeugt, kann mit Recht als artefaktisch beschrieben werden.

Die Parameter-Werte, die im Modell zu besetzen sind, sind die Anzahl n der Stufen S_n , die Anzahl j der Schichten C_j und k der Begabungen R_k , die Anzahl der Kinder in jeder Schicht/Begabungskombination C_jR_k und die Werte für die Erfolgswahrscheinlichkeiten p_{jk} . Um den reinen Wirkungszusammenhang des Modells besser hervortreten zu lassen, empfiehlt es sich, mit durchschaubaren, das heißt einfachen Parametern anzufangen. Entsprechend soll es nur je zwei Schichten (hoch, niedrig) und zwei Begabungen (hoch, niedrig) geben und zunächst alle C_jR_k gleich besetzt sein mit je 5.000 Kindern.

Entscheidend ist natürlich die Quantifizierung der p_{jk} . Ausgehend von vielen Befunden kann man sowohl einen besseren Schulerfolg der höheren sozialen Herkunft als auch selbstverständlich der höheren Begabungen annehmen. Für die Erfolgsdifferenz in Bezug auf die sozialen Herkunft spielen bekannte sozialisatorische Einflüsse wie höherer Wert von Bildung, Lesen und Selbstbeschäftigung, mehr Förderung und Interesse am Fortschritt der Kinder und mehr finanzieller Spielraum für außerschulische Bildungsangebote in höheren Schichten eine Rolle. Ferner wird dabei noch unterschieden zwischen »primären« und »sekundären« Einflüssen der Herkunftsschicht (PISA-Konsortium 2001). Primäre Einflüsse sind diejenigen, die sich direkt in der Lernfähigkeit des Kindes bemerkbar machen. Sekundäre Einflüsse sind die Unterschiede im durchschnittlichen Schulerfolg, die zwischen zwei Kindern aus unterschiedlichen Sozialschichten bestehen bleiben, auch wenn sie dieselben kognitiven Fähigkeiten besitzen. Man kann dabei zum Beispiel an Motivation, Leistungsdruck oder Entscheidungen über frühen Schulabgang in den unteren Familien, aber auch an selektive Wahrnehmung durch die Lehrer denken, die Kinder aus ihnen nahestehenden Schichten eher wahrnehmen. Bei Vorhandensein sekundärer Einflüsse bleibt eine soziale Differenz im Erfolg bestehen, auch wenn Kompetenz-Unterschiede durch die Lehrer ausgeglichen werden können.

Auf Grund dieser Ergebnisse werden für eine erste Simulation folgende Werte für die Fundamentalparameter angenommen:

- Niedrigbegabte Unterschicht $p_{11} = 0.3$, Hochbegabte Unterschicht $p_{12} = 0.6$,
- Niedrigbegabte Oberschicht $p_{21} = 0.5$, Hochbegabte Oberschicht $p_{22} = 0.8$.

Dadurch ist die »mittlere« Erfolgsdifferenz zwischen den Begabungen, die die primären Einflüsse der sozialen Herkunft beinhaltet, auf $0.6 - 0.3 = 0.8 - 0.5 = 0.3 = 30$ Prozent mehr Übergänge auf die nächste Stufe und die »mittlere« Differenz

zwischen den sozialen Herkunftsn, die die sekundären sozialen Einflüsse darstellt, auf $(0.8 + 0.5)/2 - (0.6 + 0.3)/2 = 0.2 = 20$ Prozent mehr Übergänge festgelegt.

Mit diesen Parametern ist ein Grundmodell beschrieben, in dem sich folgende Schulleistungen ergeben:

Schule		Absolute Zahlen			Schule		
		S1	S2	S3	S4	S5	Alle
Herkunft	C1	5.500	2.250	1.035	527	688	10.000
	C2	3.500	2.050	1.265	825	2.360	10.000
	Alle	9.000	4.300	2.300	1.351	3.049	20.000
		S1	S2	S3	S4	S5	Alle
Begabung	R1	6.000	2.300	940	407	353	10.000
	R2	3.000	2.000	1.360	944	2.696	10.000
	Alle	9.000	4.300	2.300	1.351	3.049	20.000
Abstrom in Prozent		S1	S2	S3	S4	S5	Alle
Herkunft	C1	55,00	22,50	10,35	5,265	6,885	100,00
	C2	35,00	20,50	12,65	8,245	23,605	100,00
	Alle	45,00	21,50	11,50	6,755	15,245	20.000
		S1	S2	S3	S4	S5	Alle
Begabung	R1	60,00	23,00	9,40	4,07	3,53	100,00
	R2	30,00	20,00	13,60	9,44	26,96	100,00
	Alle	45,00	21,50	11,50	6,755	15,245	20.000
Zustrom in Prozent		S1	S2	S3	S4	S5	Alle
Herkunft	C1	61,12	52,33	45,00	38,97	22,58	50,00
	C2	38,88	47,67	55,00	61,03	77,42	50,00
	Alle	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	20.000
		S1	S2	S3	S4	S5	Alle
Begabung	R1	66,67	53,49	40,87	30,13	11,58	50,00
	R2	33,33	46,51	59,13	69,87	88,43	50,00
	Alle	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	20.000

Insgesamt erreichen 3.049 von 20.000 Schülern (=15,25%) den obersten Abschluss, aufgeteilt auf 22,58 Prozent aus der Unter- und 77,42 Prozent aus der Oberschicht. Von den Anfangskohorten von jeweils 10.000 Schülern erreichen nur 6,89 Prozent der Unterschicht, aber 23,61 Prozent der Oberschicht diesen höchsten Abschluss. Den obersten Abschluss teilen sich 11,58 Prozent niedrig und 88,42 Prozent Hochbegabte. Von den jeweils 10.000 niedrig Begabten erreichen 3,53 Prozent und von den Hochbegabten 26,96 Prozent einen höchsten Abschluss.

Damit stehen eine ganze Reihe von Größen zur Verfügung, um die »Leistung« dieses Schulsystems an Hand des von ihm erzeugten Outputs zu beschreiben und vor allem: zu bewerten. Welche können ausgewählt werden, um die möglichen Ziele von Schulpolitik zu erfassen? Dafür muss versucht werden, die zahlreichen, aber auf den zweiten Blick geradezu erschreckend unkonkreten Äußerungen von Bildungspolitikern auf die obigen vom Modell bereitgestellten Indikatoren zu beziehen.

Die drei folgenden Werte sollen dazu dienen, die »Ziele« von Maßnahmen darzustellen:

1. Zunächst ist Schulpolitik daran interessiert, das Bildungsniveau insgesamt anzuheben und insbesondere im Hinblick auf die internationale Konkurrenz Mangel an Hochqualifizierten zu vermeiden. Dieses Ziel lässt sich nicht nur in den politischen Forderungen als Reaktionen auf PISA (»Vorbereitung auf die Wissensgesellschaft« (Schipanski in: Fahrholz/Gabriel/Müller 2002)), »neue Werte für die Informationsgesellschaft« (Schäuble in Fahrholz/Gabriel/Müller 2002), sondern auch in der PISA-Studie selbst feststellen. Um dieses Ziel zu messen, soll die Quote des höchsten Abschlusses insgesamt dienen, im obigen Beispiel sind das 15,15 Prozent.
2. Bildungspolitik ist weiter daran interessiert, Begabungsreserven zu wecken und Leistungsstärke zu fördern, um den meritokratischen Charakter unseres Ausbildungssystems zu stärken und Wettbewerb und Leistungswillen zu fördern. (»Ausschöpfung der Begabungsreserven« (Gabriel in Fahrholz/Gabriel/Müller 2002), mehr Wettbewerb und Leistung (Westerwelle in Fahrholz/Gabriel/Müller 2002), »Elitebildung« (Biedenkopf in Fahrholz/Gabriel/Müller 2002). Das soll hier mit dem Schlagwort »Exzellenz« bezeichnet und am Anteil der Hochbegabten, die den höchsten Abschluss erreichen, gemessen werden, im obigen Beispiel 26,96 Prozent.
3. Schulpolitik ist daran interessiert, Chancengleichheit für die Kinder aus unteren sozialen Schichten herzustellen (»Frühzeitige individuelle Förderung, insbes, bei Benachteiligungen durch soziale Herkunft« (Bulmahn in: Fahrholz/Gabriel/Müller 2002)), »Ganztags-Betreuung« (Bergmann in: Fahrholz/Gabriel/Müller 2002). Zur Messung der Chancengleichheit wird die Maßzahl »Odds« verwendet, definiert als die Chancen der Kinder aus der Oberschicht, den höchsten

Abschluss zu erlangen, im Verhältnis zu denselben Chancen von Kindern aus der Unterschicht. Das ist im obigen Beispiel $23,60/6,88 = 3,43$; das heißt unter den Modellbedingungen haben Kinder aus der Oberschicht eine 3,43mal höhere Chance auf den höchsten Abschluss als Kinder aus der Unterschicht, obwohl beide Schichten gleich stark mit Begabungen besetzt sind. Auch die Bezeichnung »Disparität« der Schichten ist dafür gebräuchlich.

4. Simulationsresultate

Mit Hilfe der so weit definierten Bedingungen und Ziele des Modells kann nun begonnen werden, die Ergebnisse von schulpolitischen Maßnahmen als Simulation zu berechnen und zu bewerten. Die Ergebnisse von Maßnahmen werden generell daran gemessen, ob sie in bezug auf die definierten Ziele Verbesserungen bewirken oder nicht.

Zunächst (Kap. 4.1, 4.2) geht es um Maßnahmen, die die Struktur des Systems betreffen, das heißt die Anzahl n oder die Schulstufen S_i . Alle anderen Maßnahmen (Kap. 4.4, 4.5) wirken sich so aus, dass die Übergangsparameter p_{jk} verändert werden. Um solche Maßnahmen vergleichen zu können, muss anfangs definiert werden, in welcher Weise Maßnahmen, die auf verschiedene Teile der Schülerpopulation, etwa Unter- oder Oberschicht, einwirken, als vergleichbar angesehen werden können (Kap. 4.3).

4.1 Zeitpunkt der Förderung

Als erstes Problem soll die Frage nach dem Zeitpunkt von Maßnahmen gleich welcher Art, die die Übergangsparameter beeinflussen, gestellt werden. Auf welcher Schulstufe sollte eine Förderung einsetzen? Um diese Frage mit dem Modell zu beantworten, muss vom Fundamentalparameter abgewichen werden und Übergangsparameter für einzelne Schulstufen betrachtet werden. Für eine beliebige Schülergruppe C_jR_k gebe es eine Sequenz von Übergangsparametern p_i ($i = 1, \dots, n$), die den Übergang von Stufe S_{i-1} auf S_i bestimmen. Der Anteil von C_jR_k , der den höchsten Abschluss S_n erreicht (Ziel 1), ist dann $C_jR_k \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_n$. Wird die Übergangsquote p_i auf einer beliebigen Stufe i um 10 Prozent auf $p_i + 0,1 \cdot p_i$ erhöht, erhöht sich die Quote genau auf $C_jR_k \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 0,1 \cdot C_jR_k \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_n$, also ebenfalls um 10 Prozent. Es scheint also egal, auf welcher Stufe die Förderung einsetzt.

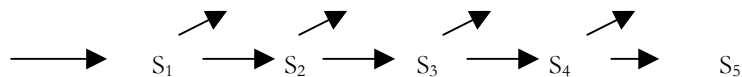
Übersehen wird dabei aber, dass es sich bei einer Steigerung eines Parameter p_i ja um eine schulische Maßnahme handelt, die die individuellen Lernkompetenzen der Schüler steigert. Steigert man diese Kompetenzen auf einer Stufe, so bleiben sie – jedenfalls teilweise, so die Hoffnung der LehrerInnen – auf den späteren Stufen erhalten, das heißt es erhöhen sich auch die Parameter der folgenden Stufen. Gleich wie viel Steigerung auf den späteren Stufen erhalten bleibt, ist offensichtlich, dass ein um so größerer Anteil die letzte Stufe erreicht, je früher die Förderung einsetzt (s. mathem. Anhang M1). Nur dann wäre ein Beginn der Förderung auf späteren Stufen im Hinblick auf Ziel 1 sinnvoll, wenn der Kompetenz-Erhalt auf den folgenden Stufen bei einem späteren Beginn wesentlich höher wäre als auf den früheren Stufen.

Wenn also schulische Förderung so angelegt ist, dass sie nicht nur auf eine Schulstufe zielt, sondern Lernkompetenzen bei den Schülern fördern will, die auch die weitere Schullaufbahn verbessern, dann gibt es keine Frage, dass die schulischen Maßnahmen in bezug auf Ziel 1 um so wirksamer sind, desto früher die Förderung einsetzt. Diese Argumentation ist offenbar auch unabhängig von der Anzahl und Verteilung der Schüler auf soziale Herkunft und Begabungen, der Anzahl der Schulstufen und der Größe der Erfolgsquoten p_{jk} . Dieses Ergebnis steht vollkommen in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der PISA-Studie, dass Länder mit guten Resultaten über bessere Vorschulerziehung in den Kindergärten, besser ausgebildetes Kindergartenpersonal und ein breiteres Kindergartenangebot verfügen.

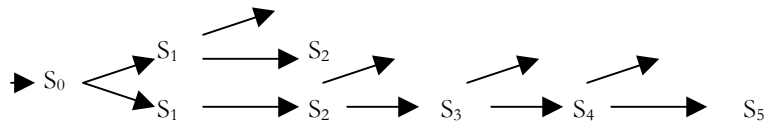
4.2 Integrierte versus selektierende Schulsysteme

Deutschland gehört zu den wenigen Ländern, die eine frühe Selektion der Schüler auf getrennte, in bezug auf die geplante Länge und Leistung des Schulverbleibs geordnete Zweige (»Säulen«) des Schulsystems praktizieren, bei denen ein Wechsel zwischen Zweigen selten bleiben soll. Wie kann ein solches versäultes System modelliert werden? Die Säulen unterscheiden sich durch ihre Länge: je leistungstärker der Zweig, desto mehr Schulstufen enthält er. Modelliert wird also ein System, das die Schüler nach einer frühen Stufe trennt, ab der es in zwei getrennten Zweigen (Kaskaden) weitergeht, die unterschiedlich lang sind; der höchste Abschluss kann nur noch auf einem der beiden Zweige erreicht werden:

– nicht-selektierendes System:



- auf früher Stufe selektierendes System:



Zu beachten dabei ist, dass die eingefügte Stufe S_0 keine Abgangsstufe ist, von der das Schulsystem verlassen werden kann (und in der die Erfolgsquote angewendet werden kann), sondern hier eine Aufteilung der kompletten Schülerschaft erfolgt. Zu modellieren ist also der Selektionsmechanismus auf der zusätzlichen Selektionsstufe. Hier gehen wir mit einer für das deutsche System positiven Annahme davon aus, dass tatsächlich alle Hochbegabten auf den weiter führenden Zweig selektiert, das heißt »erkannt« werden können. Wie steht es dann mit der Zielerreichung?

Wir lassen zur Vereinfachung die Unterschiede in der sozialen Herkunft zunächst weg und rechnen mit zwei Begabungen, niedrig (R_1) und hoch (R_2), die zu je 5.000 Kinder vorhanden seien. R_1 habe Erfolgsquote $p_1 = 0.3$ und R_2 Erfolgsquote $p_2 = 0.7$. Dann ist der Anteil, der im nicht selektierenden System den höchsten Abschluss erreicht, $5.000 \cdot 0.7^4 + 5.000 \cdot 0.3^4$. Im versäulten System werden nach Stufe S_0 die Schüler nach Begabung aufgeteilt: 5.000 weniger Begabte kommen auf den niedrigeren Zweig, die 5.000 höher Begabten auf den weiterführenden Zweig. Der Anteil aller Schüler, der im versäulten System einen höchsten Abschluss erreicht, beträgt dann $5.000 \cdot (0.7)^4$. Das ist offenbar immer weniger als im nicht selektierenden System, auch wenn andere Werte als 0.7 und 0.3 für die Erfolgsquoten, andere Werte als jeweils 5.000 für die Verteilung der Begabungen eingesetzt werden oder auf einer späteren Stufe selektiert wird. Als Folgerung ergibt sich, dass in selektierenden Systemen unter den Annahmen des Modells der Anteil derjenigen Schüler, die den höchsten Abschluss erreichen, immer geringer sein muss als in nicht selektierenden Systemen, weil – wie auch aus der Formel leicht abzulesen ist – einfach dem weniger begabten Teil der Schülerschaft die Chance (= die Übergangsquote) genommen wird, doch die nächste Stufe zu erreichen.

Doch wie steht es mit der Exzellenz? Da nach Voraussetzung alle Hochbegabten auf den weiterführenden Zweig gelangen, ist im selektierenden System dieselbe Exzellenz vorhanden wie im nicht selektierenden. Das Ziel der Exzellenz lässt sich also auch in selektierenden Systemen erreichen. Um die Auswirkungen selektierender Systeme auf die Chancengleichheit – das dritte Ziel – zu untersuchen, müssen Annahmen über die Verteilung der Begabungen auf die sozialen Herkunft und die schichtspezifischen Übergangsquoten gemacht werden. Geht man vom obigen Grundmodell aus ($p_{12} = 0.6$, $p_{22} = 0.8$), so ergeben sich für den weiterführenden Zweig folgende Übergänge:

		S1	S2	S3	S4	S5	Alle
Herkunft	C1	2.000	1.200	720	432	648	5.000
	C2	1.000	800	640	512	2.048	5.000
	Alle	3.000	2.000	1.360	944	2.696	10.000
Abstrom in Prozent					Schule		
		S1	S2	S3	S4	S5	Alle
Herkunft	C1	40,00	24,00	14,40	8,64	12,96	100,00
	C2	30,00	16,00	12,80	10,24	40,96	100,00
	Alle	20,00	20,00	13,60	9,44	26,96	5.000

Damit werden die Odds zu $40,96/12,96 = 3,16$ und sinken damit geringfügig gegenüber dem Grundmodell aus Kapitel 3. Dieses Ergebnis lässt sich verallgemeinern: In selektierenden Systemen fällt der kleine Anteil weniger Begabter aus beiden Schichten auf der höchsten Stufe weg, weil sie sich auf dem Zweig befinden, der früher endet. Die Odds dieses Anteils sind aber wegen der geringeren Erfolgsquoten höher, deshalb sinken ohne diesen Anteil die Odds auf den letzten Stufen in selektierenden Systemen. Man kann also festhalten, dass selektierende System ohne Einbuße an Exzellenz generell weniger hohe Abschlüsse produzieren, die dafür aber etwas mehr chancengleich sind.

Das Ergebnis ist wiederum schon aus PISA bekannt: dort haben integrierte Schulsysteme generell bessere Ergebnisse als selektierende Systeme. Es lässt sich auch im innerdeutschen Vergleich nachweisen: Bayern mit der rigidesten Selektion hat den geringsten Anteil an Abiturienten (PISA-E). Das Ergebnis zur Chancengleichheit scheint nicht mit PISA überein zu stimmen. Dort ist jedoch der Einfluss der sozialen Herkunft immer nur bei den 15-jährigen gemessen worden, das heißt nicht mit den hier gemessenen Odds auf der höchsten Stufe vergleichbar. Im Modell ergeben sich auf den unteren Stufen keine Änderungen bei den Odds, da sich die Ergebnisse der Zweige dort additiv zusammensetzen.

Bessere Leistungen für selektive Schulsysteme würden sich jedoch ergeben, wenn sich innerhalb der einzelnen Zweige die Erfolgsquoten der Schüler ändern würden, etwa im höchsten Zweig erhöht würden. Durch die »Homogenität« der Schülerschaft oder durch ein besseres »Lernklima«, etwa wegen besserer Lehrerbildung und Ausstattung, wären dann die Leistungen der Schüler besser allein durch den Schulkontext, und der Anteil des höchsten Abschlusses würde steigen. Ein Schüler würde allein durch einen Wechsel aufs Gymnasium seine individuelle Erfolgswahrscheinlichkeit fürs Abitur erhöhen. Dafür gibt es in der Tat auch empirische Hinweise. Bessere Ausstattung des höchsten Zweiges widerspricht allerdings zunächst dem Gleichheits-Prinzip, das jeder Schulform dasselbe Recht auf staatliche Förderung zugesteht. Insbesondere wird es aber dann wieder zu einem Nachteil für

die Chancengleichheit, wenn die Homogenität der Schülerschaft nicht nur auf Begabung, wie im Modell, sondern auf ihrer sozialen Herkunft beruht, wie die empirischen Ergebnisse ebenfalls nachweisen. In der Simulation wurde ja immer der günstigste Fall angenommen, dass nur nach Begabungen selektiert wird.

4.3 Vergleichbarkeit von Erfolgsquotenänderungen

Im Folgenden werden die Maßnahmen, die sich in den Veränderungen der verschiedenen Erfolgsquoten p_{jk} bemerkbar machen, im Hinblick auf ihre Wirkungen verglichen. Dazu muss notwendigerweise vorher definiert werden, wann Änderungen von zwei verschiedenen Erfolgsquoten p_{jk} , p_{lm} auf verschiedenen Teilpopulationen der Schülerschaft als »gleich« aufwändig anzusehen sind, zum Beispiel um Fragen der Art entscheiden zu können, ob die Förderung von Unterschicht-Schülern bessere Ergebnisse bringt als eine »gleich« aufwändige Förderung von Oberschicht-Schülern erbringen würde.

Da in den Werten der p_{jk} ein universelles quantifiziertes »Zahlungsmittel« besteht, können in diesem Modell alle Maßnahmen über die Größenordnung ihrer Wirkungen auf die p_{jk} verglichen werden. Als einfacher Vergleich bietet sich der direkte Vergleich von Differenzen an: eine Maßnahme, die eine Steigerung von $p_{jk} = 0.3$ auf $p_{jk} = 0.33$ (Differenz 0,03) für die Teilpopulation C_jR_k bewirkt, ist mit demselben Aufwand verbunden wie eine andere Maßnahme, die die Erfolgsquote $p_{nm} = 0.8$ auf $p_{nm} = 0.83$ (Differenz = 0,03) für die Teilpopulation C_nR_m steigert.

Ein etwas realistischerer Vergleich berücksichtigt den so genannten »Plafond«- oder »Ceiling«-Effekt: Wenn eine Erfolgsquote schon relativ hoch ist, ist es schwieriger, sie um denselben absoluten Betrag zu steigern, wie wenn sie viel niedriger ist. Wenn etwa die Abiturientenquote für Kinder aus Akademikerfamilien schon 90 Prozent und für Kinder aus Arbeiterfamilien erst 10 Prozent ist, so macht es viel mehr Aufwand, die Quote der Akademikerkinder um 5 Prozent auf 95 Prozent zu steigern als die Quote der Arbeiterkinder auf 15 Prozent, weil angenommen werden kann, dass in den Akademikerfamilien schon die maximale Motivation für ein Abitur vorhanden ist, während in den Arbeiterfamilien noch eine Menge ungenutzte Talente brachliegen. Um diesen Plafond-Effekt zu modellieren hat Boudon folgende Formel vorgeschlagen: eine Steigerung einer Erfolgsquote p um den »Faktor« a entspricht der neue Wert $p + (1-p) \cdot a$. Mit dieser Formel entspricht eine Steigerung um den »Faktor« 0.1 von $p = 0.3$ dem neuen Wert $0.3 + 0.7 \cdot 0.1 = 0.37$ und von $p = 0.8$ dem neuen Wert $0.8 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.82$.

Ohne zusätzliche Lehrkräfte einzustellen bzw. ohne zusätzliche staatliche Förderung gleich welcher Art lassen sich nur schulische Maßnahmen durchführen, bei denen der Lehraufwand insgesamt gleich bleibt. Das lässt sich etwa damit

begründen, dass pro Lehrerin die Aufmerksamkeitsmenge, die sie insgesamt einsetzen kann, begrenzt ist. Deshalb kann ohne zusätzliche Kapazität die gesamte pädagogische Zuwendung nur umverteilt, nicht erhöht werden. Im Modell lässt sich das durch die Bedingung darstellen, dass die Summe über alle p_{jk} konstant bleibt. »Kostenneutrale« Maßnahmen, die eine Teilpopulation fördern sollen, können also nur »zu Lasten« einer anderen Teilpopulation gehen. Eine Steigerung der Erfolgsquote einer Teilpopulation bedeutet dann eine gleich große Minderung der Erfolgsquote einer anderen Teilpopulation um denselben Wert. Im Falle einer Steigerung ohne Plafond-Effekt würde eine »kostenneutrale« Veränderung von zwei Erfolgsquoten p_1 und p_2 um die Größe x zu den beiden neuen Erfolgsquoten $p_1 + x$, $p_1 - x$ führen; im Fall einer Steigerung mit Plafond-Effekt ergeben sich die beiden neuen Werte $p_1 + (1-p_1) \cdot x$, $(p_2 - x)(1-x)$.

Eine noch realistischere Modellierung muss auch berücksichtigen, dass die Teilpopulationen an Schülern eventuell verschieden große Anteile aller Schüler darstellen. Der Aufwand, den Erfolg von 5.000 Schülern der Oberschicht um den »Faktor« x zu steigern, entspricht damit demselben Aufwand wie 10.000 Schüler der Unterschicht um den »Faktor« $x/2$ zu steigern. Das lässt sich wiederum damit begründen, dass es bei allen Maßnahmen um individuelle Lernsteigerungen geht, die deshalb als Aufwand pro Schüler eingehen. Bei ungleicher Verteilung der Schülerpopulation muss deshalb die obige Bedingung noch verfeinert werden dazu, dass für kostenneutrale Maßnahmen die Summe über alle $C_j R_k p_{jk}$ konstant bleibt. Damit sind die Vorüberlegungen für einen Vergleich von Maßnahmen abgeschlossen.

4.4 Begabung fördern – eher differenzierend oder eher ausgleichend?

Die Frage, die nun erläutert werden soll, ist: Was ist günstiger im Hinblick auf die formulierten Ziele: a) ein Unterricht, der sich eher egalitär um die Angleichung der Erfolgchancen von Schülern mit hohen und niedrigen Lernkompetenzen bemüht oder b) ein eher elitärer Unterricht, der sich differenziert um die Schüler mit »höherer« Kompetenz zu Lasten der »weniger« Kompetenten kümmert? Die Frage kann auf beliebige Merkmale verallgemeinert werden, wenn statt »Lernkompetenz« allgemein zum Beispiel Geschlecht, soziale Herkunft, Lesefähigkeit etc. eingesetzt wird. Im Folgenden soll sie bezüglich des Merkmals »Begabung« R , untersucht werden.

Die Unterschiede zwischen den Schülern seien zunächst auf die Begabungsunterschiede eingeschränkt, das heißt es gebe keine Schichtunterschiede. Um die Fragestellung weiter zu vereinfachen, gebe es nur zwei Arten Begabungen: weniger (R_1) und mehr Begabte (R_2), die zunächst in gleicher Anzahl vorhanden seien, etwa je 5.000. Eine egalitäre Förderung würde im Idealfall gleiche Übergangsquoten für

beide erreichen, etwa $p_1 = p_2 = p = 0.6$. Die Simulation ergibt dann folgendes Ergebnis:

		Schule				
Begabung		S1	S2	S3	S4	Alle
	R1	2.000	1.200	720	1.080	5.000
	R2	2.000	1.200	720	1.080	5.000
	Alle	4.000	2.400	1.440	2.160	10.000

Dann besteht keine Disparität ($\text{Odds} = 1$), insgesamt erreichen 21,6 Prozent den höchsten Abschluss, und die Exzellenz beträgt ebenfalls 21,6 Prozent ($= 1080/5000$).

Ein differenzierender Unterricht würde dagegen höhere Erfolgsquoten für die mehr Begabten, aber geringere Erfolgsquoten für die weniger Begabten erreichen. Ein kostenneutraler Vergleich beider Maßnahmen, zum Beispiel mit $x = 0,1$ als »Differenzierungsgrad«, führt zu folgenden Erfolgsquoten-Veränderungen: $p_1 = p - x$ für R_1 , $p_2 = p + x$ für R_2 , also $p_1 = 0.7$ und $p_2 = 0.5$. Resultat ist:

		Schule				
Begabung		S1	S2	S3	S4	Alle
	R1	2.500	1.250	625	625	5.000
	R2	1.500	1.050	735	1.715	5.000
	Alle	4.000	2.300	1.360	2.240	10.000

Mit diesen Voraussetzungen steigt die Quote des letzten Abschlusses auf 23,4 Prozent, die Exzellenz auf 34,3 Prozent; die Disparität allerdings steigt ebenfalls auf 2,74. Das wäre allerdings in diesem Fall durchaus hinnehmbar, weil Disparität bezüglich der Begabung ja die unterschiedlichen Erfolge der Begabungen ausdrückt, die herauszuarbeiten geradezu die Aufgabe der Schule ist. Also ergibt sich als Ergebnis dieser Simulation, dass ein die Begabungen differenziert fördernder Unterricht im Hinblick auf die Steigerung hoher Abschlussquoten und Exzellenz geeigneter ist als ein die Begabungen egalisierender Unterricht.

Dieses Ergebnis hat auch Bestand, wenn die R_1 und R_2 ungleich groß sind und man Schichten berücksichtigt, solange es mehr als zwei Stufen im System gibt. Ebenso bleibt es auch für Änderungen der Erfolgsquoten mit Plafondeffekt bestehen (s. math. Anhang M2). Es ist also allgemein gültig.

Das Ergebnis lässt sich nun ebenfalls auf soziale Herkunft statt Begabungen anwenden. Für die Simulation ist es gleich, ob es sich um die Erfolgsquoten der verschiedenen Begabungen oder um die Erfolgsquoten der verschiedenen Schichten

handelt, die umverteilt werden. Also gilt auch: Werden die Schüler aus sozialen Herkunftsn differenziert gefördert, ergeben sich mehr Abgänger aus den höheren Schulstufen, mehr Abgänger aus der stärker geförderten Herkunft und eine höhere Disparität zwischen den sozialen Schichten. Die letzten beiden Resultate sind nun aber bezüglich der sozialen Herkunft gerade nicht die Ziele, da hier das Ziel der möglichst großen Chancengleichheit, das heißt kleiner Disparität und einer sozial gleichmäßigen Verteilung der sozialen Herkunft in der höchsten Abgangsstufe besteht.

Diese letzten Ziele sind offenbar gerade dadurch zu erreichen, dass die Erfolgsquoten der Schüler bezüglich ihrer sozialen Herkunft angeglichen werden, wie die Simulation zeigt. Die Schule steht deshalb bei der Erreichung der Ziele vor der Aufgabe, bezüglich der Begabung eine größtmögliche Differenzierung, aber bezüglich der sozialen Herkunft eine möglichst weitgehende Egalisierung gleichzeitig anzustreben. Bestimmte Unterrichtsmaßnahmen, die Veränderungen der Erfolgsquoten zur Folge haben, wirken aber immer auf beide Merkmale: wenn man zum Beispiel die mehr Begabten mehr fördert, fördert man begabte Schüler aus allen Schichten. Die Resultate der vorangehenden Simulation galten aber nur für ein isoliertes Merkmal. Es ist deshalb zunächst unklar, mit welchen Erfolgsquoten-Änderungen die Ziele beim Vorhandensein von beiden Merkmalen am besten erreicht werden können.

4.5 Vergleich von Unterschichtförderung versus Begabtenförderung – was ist besser?

Es folgen deshalb Simulationen zu den unterschiedlichen Wirkungen, die bei Erfolgsquoten-Änderungen mit beiden Merkmalen auftreten. Ausgegangen wird wiederum davon, dass schulische Maßnahmen tatsächlich zwischen den beiden Schüler-Merkmalen, ihrer familiären sozialen Herkunft auf der einen Seite und ihren individuellen Lernkompetenzen auf der anderen Seite, unterscheiden können. Diese Merkmale sind zwar sicher im einzelnen Schüler vermischt, aber Maßnahmen lassen sich hauptsächlich auf eines der beiden Merkmale fokussieren.

Zu denken ist zum Beispiel daran, dass man die »Übergangs-Beratung« an den entscheidenden Stufen des Bildungssystems verstärkt, um den Anteil der begabten Schüler aus bildungsfernen Schichten, die sich für eine Fortsetzung ihrer Bildungslaufbahn entscheiden, zu erhöhen. Untersuchungen weisen nämlich nach, dass nur 10 Prozent der Schüler mit Sekundarstufenreife aus höheren Schichten, aber mehr als 30 Prozent aus unteren sozialen Schichten ihre Befähigung nicht wahrnehmen und das Abitur nicht versuchen (*tas* vom 20. Februar 2003). Eine solche Beratung würde sich offenbar überwiegend an untere Schichten richten. Oder es wird ein

reiner »Begabten«-Kurs innerhalb eines Jahrgangs eingerichtet, in den die Schüler allein auf Grund einer Eingangsprüfung gelangen; in eine solche Aufnahmepraxis würde die familiäre Herkunft nur indirekt eingehen. Auch wenn in der Praxis wohl viele Maßnahmen nur schwer in Bezug auf ihre Wirkung auf beide Merkmale zu trennen sind, lohnt es sich aus dem Grund, ihre wechselseitigen Auswirkungen theoretisch zu untersuchen, weil dann eingeschätzt werden kann, auf welches der beiden Merkmale sich in der Praxis das Gewicht legen sollte, um die Ziele von Reformmaßnahmen zu erreichen.

Wechselseitige Auswirkungen können zum Beispiel diese sein: Welche Folgen hat eine Hochbegabungsförderung auf die soziale Chancengleichheit; oder umgekehrt: Welche Folgen hat eine Verminderung der Chancenungleichheit auf die Exzellenz, den Anteil der Hochbegabten auf der letzten Stufe?

Bei einer Simulation mit beiden Merkmalen ist das Ergebnis nicht nur von den Erfolgsquoten p_{jk} der einzelnen Kombination Schicht k und Begabung j abhängig, sondern ebenso von der spezifischen Verteilung der Begabungen auf die einzelnen Schichten, das heißt dem Anteil der höher Begabten an der Unter- bzw. an der Oberschicht. Konservative Begabungstheorien gehen davon aus, dass die individuellen Lernfähigkeiten in den unteren Schichten geringer sind, das heißt der Anteil der höher Begabten wäre um so geringer, je niedriger die soziale Herkunft ist. Das könnte allerdings auch ein Effekt längerer meritokratischer sozialer Mobilität einer Gesellschaft sein: Wenn die Begabten aller Schichten tatsächlich allein auf Grund des höheren Ertrags ihrer Begabung auf dem Arbeitsmarkt frei in höhere soziale Schichten aufsteigen könnten, und wenn ein Teil der Begabung tatsächlich genetisch vererbbar wäre, dann müssten sich über Generationen hinweg die Begabteren in den oberen Schichten konzentrieren. Wenn andererseits die Lernkompetenzen, mit denen die Schüler in der Grundschule starten, hauptsächlich durch die familiäre Sozialisation der ersten Lebensjahre geprägt sind, worauf viele Untersuchungen hindeuten, und deshalb stark mit der familiären Herkunft korrelieren, würde sich derselbe Eindruck eines höheren Anteils an weniger Begabten in den unteren Schichten ergeben, obwohl tatsächlich die genetischen Begabungen durchaus in allen sozialen Schichten gleichmäßig verteilt wären.

Die Verteilung der Lernkompetenzen der Schüler auf die sozialen Schichten stellt eine in der Realität messbare (siehe PISA) und langfristig in der Gesellschaft stabile Größe dar, wie jede Grundschullehrerin bestätigen kann, und könnte deshalb prinzipiell ermittelt werden. Im Simulationsmodell muss man sich zum Glück nicht auf eine Verteilung festlegen, sondern kann die Effekte beider Möglichkeiten simulieren. Im Folgenden wird deshalb sowohl mit gleicher wie mit ungleicher Begabungs- und Schichtgrößenverteilungen gearbeitet.

Es sei davon ausgegangen, dass die Politik – wie nun tatsächlich nach PISA – beschlossen hat, das Bildungssystem zu fördern, um die obigen drei Ziele besser zu

erreichen als bisher. Sei es, weil die gewährten Mittel immer zu knapp sind, um alles Mögliche zu unternehmen oder, weil die regierende Partei eine eher konservative oder eher reformerische Politik verfolgt, es stellt sich dann immer die Frage: Welche Teilgruppe sollte gefördert werden, um im Hinblick auf die Erreichung die drei Ziele den meisten Ertrag zu erbringen? Aus den obigen Simulationen geht schon hervor, dass sowohl eine reine Förderung der oberen Schichten als auch eine reine Förderung der weniger Begabten ausfällt, erstere, weil die Chancenungleichheit extrem erhöht würde, letztere, weil die Exzellenz zu stark fallen würde. Deshalb wird im weiteren zur Beantwortung dieser Frage nur noch eine Förderung der höher Begabten in ihren Effekten verglichen mit einer reinen Unterschichtförderung.

4.5.1. Die Effekte auf die Chancenungleichheit

Die Ausgangsbedingungen der folgenden Simulation sind wie im Grundmodell (Kap. 3). Dann gebe es die Möglichkeit, schulische Förderung zu verstärken. Sie kann entweder zur Erhöhung der Erfolgsquoten der Unterschicht, p_{11} und p_{12} , oder zur Erhöhung der Erfolgsquoten der Begabten, p_{12} und p_{22} , eingesetzt werden. Dabei wird von einer »gleichwertigen« Erhöhung im Sinn des »Plafond«-Effekts um 10 Prozent ausgegangen. Die folgenden Resultate ergeben sich:

Unterschichtförderung: $P_{11} = 0.37$, $p_{12} = 0.64$

		S1	S2	S3	S4	S5	Alle
Herkunft	C1	49,50	23,18	11,69	6,31	9,33	100,00
	C2	35,00	20,50	12,65	8,25	23,60	100,00
	Alle	42,25	21,84	12,17	7,28	16,47	20.000

		S1	S2	S3	S4	S5	Alle
Begabung	R1	56,50	24,16	10,56	4,72	4,06	100,00
	R2	28,00	19,52	13,77	9,84	28,87	100,00
	Alle	42,25	21,84	12,17	7,28	16,474	20.000

Begabtenförderung: $P_{12} = 0.64$, $P_{22} = 0.18$

		S1	S2	S3	S4	S5	Alle
Herkunft	C1	53,00	22,02	10,52	5,66	8,79	100,00
	C2	34,00	19,88	12,30	8,09	25,73	100,00
	Alle	43,50	20,95	11,41	6,88	17,26	20.000

		S1	S2	S3	S4	S5	Alle
Begabung	R1	60,00	23,00	9,40	4,07	3,53	100,00
	R2	27,00	18,90	13,42	9,68	30,99	100,00
	Alle	43,50	20,95	11,41	6,88	17,26	20.000

Wie man sieht, ergeben unter diesen Bedingungen beide Förder-Möglichkeiten gegenüber dem Grundmodell Verbesserungen bei allen drei Zielen. Der Unterschied besteht darin, dass die Förderung der Unterschicht die Chancenungleichheit in höherem Maß reduziert wie die Begabtenförderung, dagegen die Exzellenz weniger erhöht. Da die Begabtenförderung auch die größte Erhöhung der Abgangsquote auf der obersten Stufe bringt, ist sie im Hinblick auf die Erreichung aller drei Ziele vorzuziehen. Steht allerdings die Reduzierung der Chancenungleichheit allein im Vordergrund, wäre die Förderung der Unterschicht eine bessere Maßnahme.

Sind diese Resultate auch unter veränderten Ausgangsbedingungen stabil? Eine interessante Frage wäre hier, ob etwa unter veränderten Bedingungen die Begabtenförderung doch zu einer Verstärkung der Chancenungleichheit führt, denn dann könnte man ausnahmslos die Unterschichtförderung als Maßnahme empfehlen. Bei veränderten Bedingungen ist insbesondere an die kombinierte Begabungs- und die Schichtverteilung zu denken oder an die mittlere Schichtdifferenz und die mittlere Begabungsdifferenz bezüglich der Übergangsquoten. Hier lässt sich nachweisen, dass nur unter sehr extremen Bedingungen eine Begabungsförderung zu einer Verstärkung führt; es muss gelten:

Satz 1: $O(S_n)$ sei die Chancenungleichheit auf der letzten Stufe, und p_{12} und p_{22} werden um den Faktor e mit Plafondeffekt gesteigert. Seien x und y die Wachstumsfaktoren, mit denen die Abgänge auf der höchsten Stufe in beiden Schichten durch die Wirkung von e steigen, das heißt dadurch definiert, dass

$$p_{22}^{n-1}(1+x) = (p_{22} + e(1-p_{22}))^{n-1}$$

$$p_{12}^{n-1}(1+y) = (p_{12} + e(1-p_{12}))^{n-1}$$

Sei $z = x/y$. Dann steigt $O(S_n)$ nur dann an, wenn (Beweis s. mathem. Anhang M3)

$$z \cdot \frac{C_1 R_1 p_{11}^{n-1}}{C_1 R_2 p_{12}^{n-1}} - \frac{C_2 R_1 p_{21}^{n-1}}{C_2 R_2 p_{22}^{n-1}} > 1 - z$$

In den beiden Brüchen stehen für jede Schicht die Verhältnisse von wenig und hoch Begabten, die von der letzten Stufe abgehen. Sie sind direkt von dem Begabungs-Verhältnis in der gesamten Schicht abhängig. Die Größe z ist das Verhältnis, in dem eine Plafond-Effekt-Erhöhung die Übergangsraten erhöht; wegen des Plafond-Effekts wird z um so kleiner sein, je weiter der Durchschnitt der Übergangsquoten in beiden Schichten voneinander entfernt ist. Aus dem Satz ergibt sich deshalb, dass

- je mehr im Verhältnis viele hoch Begabte in der Oberschicht (C_2R_1 , Nenner des Subtrahenden) und wenige wenig Begabte in der Unterschicht (C_1R_1 , Zähler des ersten Bruchs) sind, desto eher wird eine reine Begabtenförderung zu mehr Chancenungleichheit führen
- je größer die sekundären sozialen Einflüsse (die mittlere Erfolgsdifferenz zwischen den Schichten) ist, desto eher führt reine Begabungsförderung *nicht* zur Erhöhung der Chancenungleichheit.

Weil in die Formel alle relevanten Parameter des Modells eingehen, lässt sich im konkreten Fall nur durch Einsetzen konkreter Werte für die Parameter ermitteln, ob Begabungsförderung oder Unterschichtförderung vorzuziehen ist. Als einfaches Beispiel diene das in folgenden Punkten veränderte Grundmodell: die Übergangsquoten seien für beide Begabungsarten gleich (keine primäre sozialen Einflüsse), aber die sekundäre soziale Einflüsse seien im Maß von 0,2 vorhanden: $p_{11} = p_{12} = 0.4$, $p_{21} = p_{22} = 0.6$, und in der Unterschicht gebe es neun mal mehr weniger Begabte als hoch Begabte ($C_1R_1 = 9.000$, $C_1R_2 = 1.000$). Dann ergibt sich:

Herkunft		Schule					
		S1	S2	S3	S4	S5	Alle
	C1	6.000	2.400	960	384	256	10.000
	C2	4.000	2.400	1.440	864	1.296	10.000
	Alle	10.000	4.800	2.400	1.248	1.552	20.000

Die Odds betragen dann $1296/256 = 5,06$. Nun werde mit 10 Prozent Plafond-Effekt die hoch Begabten gefördert, das heißt $p_{12} = 0.54$ und $p_{22} = 0.36$:

Herkunft		Schule					
		S1	S2	S3	S4	S5	Alle
	C1	5.940	2.408	978	398	275	10.000
	C2	3.800	2.352	1.457	904	1.487	10.000
	Alle	9.740	4.760	2.436	1.302	1.762	20.000

Die Odds erhöhen sich auf $1487/275 = 5,41$; das heißt Begabungsförderung führt unter diesen Umständen zur Erhöhung der Chancenungleichheit! Wäre dagegen das Verhältnis der wenige Begabten zu den hoch Begabten in der Unterschicht nur 4 zu 1 ($C_1R_1 = 8.000$, $C_1R_2 = 2.000$), dann ergäbe sich vor der Förderung dieselben Odds von 5,06 (weil beide Begabungen gleich erfolgreich sind), aber nach der Förderung Folgendes:

Herkunft		S1	S2	S3	S4	S5	Alle
	C1	5.880	2.417	997	412	294	10.000
	C2	3.800	2.352	1.457	904	1.487	10.000

Alle 9.680 4.769 2.454 1.316 1.781 20.000

Bei dieser Verteilung sinken die Odds auf $1487/294 = 5,05$! Hier ist also eine recht extreme Begabungsverteilung nötig, damit die reine Begabungsförderung Nachteile ergibt, genauer muss das Verhältnis der Begabungen in der Unterschicht größer als 4,12 sein (zur Berechnung s. mathem. Anhang M4).

Da die Ergebnisse der Simulation wiederum nicht von der »Benennung« der Merkmale abhängen, können sie einfach auf andere Merkmalskombinationen übertragen werden, zum Beispiel auf das Merkmal Geschlecht. Hier ergibt sich ein kontraintuitives Ergebnis. Da Jungen und Mädchen am Anfang der Schullaufbahn immer gleich häufig sind, kann man hier die Fälle ungleicher (Geschlechter-) Verteilung ausschließen. Wenn Mädchen nun – nach Simulationsannahme – schlechtere Erfolgsquoten als Jungen hätten, zeigt sich hier, dass die reine Mädchenförderung (im obigen Fall gleich der reinen Unterschichtförderung) zwar die Disparität zwischen Jungen und Mädchen gut abbaut, aber insgesamt nicht die Exzellenz und Abschlussquotensteigerung erreicht, wie eine reine nicht nach Geschlecht differenzierende Begabtenförderung erreichen würde, die dazu ebenfalls die Disparität abbauen würde!

4.5.2 Die Effekte auf die Abschlussquote und die Exzellenz

Unter denselben Bedingungen wie oben sollen nun die beiden Fördermöglichkeiten im Hinblick auf die Steigerung der höchsten Stufe, der Abschlussquote verglichen werden. Nach den Resultaten der letzten beiden Simulationen, in denen die Begabtenförderung auch immer die größte Steigerung der Abschlussquote gebracht hat, ist zu fragen, ob es Konstellationen gibt, unter denen demgegenüber die Förderung der Unterschicht zusätzlich zur größten Verringerung der Chancengleichheit auch noch die höchste Steigerung der Abschlussquote ergibt. Die folgende Simulation zeigt, dass das möglich ist. Die Bedingungen sind die des Grundmodells, auf vier Stufen reduziert und in einem Parameter geändert: der Erfolg der höher Begabten der Oberschicht ist generell etwas geringer ($p_{22} = 0.7$). Dann ergibt sich mit

Unterschichtförderung: $P_{11} = 0.37$, $p_{12} = 0.64$

		S1	S2	S3	S4	Alle
Herkunft	C1	4.950	2.318	1.169	1.564	10.000
	C2	4.000	2.300	1.360	2.340	10.000
	Alle	8.950	4.618	2.529	3.904	20.000

Begabtenförderung: $P_{12} = 0.64$, $P_{22} = 0.73$

		S1	S2	S3	S4	Alle
Herkunft	C1	5.300	2.202	1.052	1.446	10.000
	C2	3.850	2.236	1.344	2.570	10.000
	Alle	9.150	4.438	2.397	4.016	20.000

In der zweiten Simulation ist nun einfach die Unterschicht insgesamt doppelt so groß, bei gleicher Verteilung der Begabungen ($C_1R_1 = 10.000$, $C_1R_2 = 10.000$):

Unterschichtförderung: $p_{11} = 0.37$, $p_{12} = 0.64$

		S1	S2	S3	S4	Alle
Herkunft	C1	9.900	4.635	2.337	3.128	10.000
	C2	4.000	2.300	1.360	2.340	10.000
	Alle	13.900	6.935	3.697	5.468	20.000

Begabtenförderung: $P_{12} = 0.64$, $P_{22} = 0.73$

		S1	S2	S3	S4	Alle
Herkunft	C1	10.600	4.404	2.105	2.891	10.000
	C2	3.850	2.236	1.344	2.570	10.000
	Alle	14.450	6.640	3.449	5.462	20.000

Die asymmetrische Verteilung der Schichtgrößen führt offenbar dazu, dass die reine Unterschichtförderung nicht nur die größte Chancenungleichheitsreduzierung, sondern ebenfalls die höchste Steigerung der Abschlussquoten ergibt. Unter diesen Bedingungen ist es eindeutig, dass eine gezielte Unterschichtförderung alle drei Ziele am besten erfüllt. Die Bedingungen dieser Simulation – doppelt große Unterschicht – stellen in etwa die Grenze dar, ab der eine solche reine Unterschichtsförderung die optimale Lösung ist. Das Ergebnis gilt allgemein unter folgenden Voraussetzung:

Satz 2: Sei a ein »Plafond«-Effekt-Faktor und sei $p_{11}(1+x) = p_{11} + a(1-p_{11})$, $p_{22}(1+y) = p_{22} + a(1-p_{22})$. Wenn dann

$$\frac{C_2 R_2 p_{22}^{n-1}}{C_1 R_1 p_{11}^{n-1}} < \frac{(1+z)^{n-1} - 1}{(1+x)^{n-1} - 1} \text{ ist,}$$

dann wird durch die Unterschichtförderung mit dem Faktor a eine höhere Steigerung der Abschlussquote erreicht als durch die Begabtenförderung mit dem Faktor a (Beweis s. mathem. Anhang M5).

Der linke Teil der Gleichung ist das Verhältnis des »erfolgreichsten« Teils (Hochbegabte der Oberschicht) der Bevölkerung auf der letzten Stufe des Bildungssystems zum »erfolglosesten« Teil (wenig Begabte der Unterschicht). Es wird um so kleiner, je größer der letztere Teil im Verhältnis zum ersteren in der Bevölkerung insgesamt ist (C_1R_1/C_2R_2). Der rechte Teil ist das Verhältnis der »Steigerungsraten«, die durch den Plafond-Effekt-Faktor im erfolglosesten und im erfolgreichsten Teil erreicht werden können. Es wird um so größer, je größer die Differenz zwischen den beiden Erfolgsquoten am Anfang ist. Der Satz bedeutet deshalb, dass die Unterschichtförderung um so eher eine höhere Steigerung der Abschlussquote erreicht als die Begabtenförderung, je größer der Anteil der wenig Begabten in der Unterschicht ist und je größer die Differenz im Bildungserfolg vom »schwächsten« zum »stärksten« Teil der Bevölkerung ist.

Im vorangehenden Simulationsbeispiel sind diese Bedingungen erfüllt worden (s. mathem. Anhang M6) dadurch, dass bei gleicher Begabungsverteilung der Anteil der Unterschicht insgesamt verdoppelt worden ist. Die Bedingung, dass die Unterschicht erheblich größer als die Oberschicht ist, ist nun aber wieder so häufig in unseren Gesellschaften anzutreffen, dass man in der Zusammenfassung der Ergebnisse dieses Kapitels 4.5 zu der Empfehlung gelangen könnte, in jedem Fall die Unterschichtförderung der Begabtenförderung vorzuziehen, da sie erheblich mehr zur Chancenungleichheitsreduzierung beiträgt und unter durchaus realistischen Bedingungen zusätzlich die größte Abschlussquote bringt.

5. Zusammenfassung: Zielverwirklichung in der Bildungspolitik – ein ungewisses Geschäft

Das Modell, das hier für das Bildungssystem, verwendet wurde, ist relativ einfach zu beschreiben. Die Ansatzpunkte für Bildungspolitik sind auf wenige Parameter beschränkt. Wenn eine Entscheidung zwischen diesen wenigen Parametern getroffen werden soll, das heißt für welche Maßnahmen Geld ausgegeben werden soll, so zeigt das Modell aber, dass dafür keine allgemein gültigen Aussagen gemacht werden können, sondern die Entscheidung oft von der ganz konkreten Zusammensetzung der Schülerschaft abhängt, das heißt die selbe Maßnahme kann an einer Schule zu einer höheren Abschlussquote führen und sie auf einer anderen vermindern. Die Formeln sowohl in 4.5.1 als auch in 4.5.2 sind zwar genau, ihr

Ergebnis hängt aber von den konkreten Schichtgrößenverhältnissen und Erfolgsparametern ab, deren empirische Erfassung zwar prinzipiell möglich, aber keineswegs eindeutig ist. So zeigt sich schon in diesem einfachen Modell, dass die komplexen Zusammenhänge im Bildungssystem drastisch reduziert, dass eine Entscheidung zwischen zwei politisch wesentlich unterschiedlichen Maßnahmen unter allgemeinen Bedingungen nicht optimal oder nur unter in Kaufnahme ungewollter Folgen getroffen werden kann.

Die Ergebnisse des Modell sind denn auch, was die wesentlichen politischen Unterschiede betrifft, überraschenderweise ausgewogen:

- sie liefern in Kap. 4.4 mit dem Nachweis, dass Begabungen differenzierender Unterricht bessere Ergebnisse bringt, sowohl den eher konservativen Standpunkten
- wie auch in Kap. 4.5 mit dem Nachweis dass unter oft geltenden Bedingungen zusätzliche Förderung für die Unterschichten optimale Verbesserungen erreichen, den eher reformerischen Standpunkten

Argumente. Eindeutig lassen sich allerdings aus dem Modell strukturelle Maßnahmen folgern: Der – im internationalen Vergleich – deutsche »Sonderweg« eines früh selektierenden Systems, einer späten Einschulung und einer besseren Ausstattung auf den späteren Stufen ist offenbar nicht geeignet, insgesamt höhere Abgängerzahlen aus den höheren Stufen des Systems zu erzielen, wenn er auch der Exzellenz nicht schadet (Kap. 4.1, 4.2).

So kann man die Erfahrungen mit diesem Simulationsmodell dahin gehend zusammenfassen, dass es den Blick schärft für die komplexen Wechselwirkungen im Bildungssystem und verdeutlicht, dass man, um optimale Lösungen zu erhalten, eher nach individuellen Lösungen suchen sollte als nach der einen großen politischen Richtung. Es zeigt aber auch, dass es im Einzelfall um Entscheidungen zwischen politischen Werten gehen kann, wenn die Bedingungen gerade so sind, dass die Ziele der Chancengleichheit und der Exzellenz nicht gleichzeitig verwirklichtbar sind.

Literatur

- Böttcher, Wolfgang/Klemm, Klaus/Rauschenbach, Thomas (Hg.) (2001), *Bildung und Soziales in Zahlen. Statistisches Handbuch zu Daten und Trends im Bildungsbereich*, Weinheim.
- Böttcher, Wolfgang/Weishaupt, Horst/Weiß, Manfred (Hg.) (1997), *Wege zu einer neuen Bildungsökonomie. Pädagogik und Ökonomie auf der Suche nach Ressourcen und Finanzierungskonzepten*, Weinheim.

- Boudon, Raymond (1973), *L'inegalité des chances*, Paris.
- Cortina, Kai S. (2003), »Der Schulartwechsel in der Sekundarstufe I: Pädagogische Maßnahme oder Indikator eines falschen Systems?«, *Zeitschrift für Pädagogik*, Jg. 49, H. 1, S. 127–144.
- Esser, Hartmut (1993), *Soziologie. Allgemeine Grundlagen*, Frankfurt a.M.
- Fararo, Thomas J./Kosaka, Kenji (1976), »A mathematical analysis of Boudon's IEQ model«, *Social Science Information*, Jg. 15, S. 431–475.
- Fahrholz, Bernd/Gabriel, Sigmar/Müller, Peter (Hg.) (2002), *Nach dem PISA-Schock. Plädoyer für eine Bildungsreform*, Hamburg.
- Fodders, Federico (2001), *Bildungspolitik für den Standort D*, Heidelberg.
- Hartmann, Michael/Kopp, Johannes (2001), »Elitenselektion durch Bildung oder Herkunft? Promotion, soziale Herkunft und der Zugang zu Führungspositionen in der deutschen Wirtschaft«, *Kölner Zeitschrift für Soziologie und Sozialpsychologie*, Jg. 53, S. 436–466.
- Hopf, Wulf (2003), »Soziale Ungleichheit und Bildungskompetenz – Erklärung und Exploration in den PISA-Studien«, *Zeitschrift für Sozialisation und Erziehungspsychologie*, Jg. 23, S. 10–23.
- Klemm, Klaus u.a. (1992), *Bildungsplanung in den neuen Bundesländern: Entwicklungstrends, Perspektiven und Vergleiche*, Weinheim.
- KMK (Kultusministerkonferenz) (1993), *Prognosen der Studienanfänger, Studierenden und Hochschulabsolventen bis 2010*, Bonn.
- Mare, Robert (1980), »Social Background an Scholl Continuation Decisions«, *Journal of the American Statistical Association*, Jg. 75, S. 295–305.
- Mare, Robert (1981), »Change and Stability in Educational Stratification«, *American Sociological Review*, Jg. 45, S. 72–87.
- Müller, Walter (1998), »Erwartete und unerwartete Folgen der Bildungsexpansion«, in: Friedrichs, Jürgen/Lepsius, Rainer M./Mayer, Karl Ulrich (Hg.), *Die Diagnosefähigkeit der Soziologie*, (=Kölner Zeitschrift für Soziologie und Sozialpsychologie, Sonderheft 38), Opladen, S. 81–111.
- Müller, Walter/Haun, Dietmar (1993), »Bildungsexpansion und Bildungsungleichheit«, in: Glatzer, Wolfgang (Hg.), *Einstellungen und Lebensbedingungen in Europa. Soziale Indikatoren XVII*, Frankfurt a.M., S. 225–268.
- Müller, Walter/Haun, Dietmar (1994), »Bildungsungleichheit im sozialen Wandel«, *Kölner Zeitschrift für Soziologie und Sozialpsychologie*, Jg. 46, S. 1–42.
- PISA-Konsortium (Hg.) (2001), *PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*, Opladen.
- PISA-Konsortium (Hg.) (2002), *PISA 2000 – Die Länder der Bundesrepublik Deutschland im Vergleich*, Opladen.
- Schnuer, Günther (1986), *Die deutsche Bildungskatastrophe. 20 Jahre nach Picht – Lehren und Lernen in Deutschland*, Herford.
- Weiss, Volkmar (2000), *Die IQ-Falle. Intelligenz, Sozialstruktur und Politik*, Graz.

Mathematischer Anhang:

M1:

Sei $C_j R_k$ die Anzahl der Schülerpopulation mit sozialer Herkunft C_j und Begabung R_k und sei p_{jk} ihre Übergangsquote. Dann gelangt davon genau die Anzahl $C_j R_k p_{jk} \cdots p_{jk} = C_j R_k p_{jk}^{n-1}$ bzw. der Anteil p_{jk}^{n-1} auf die letzte Stufe S_n des Systems. Wenn p_{jk} auf Stufe m ($1 \leq m < n$) auf q_{jk} erhöht wird, wird der Anteil zu

$$p_{jk}^m q_{jk}^{n-m-1}$$

Für $0 < h < m$ und $0 < p_{jk} < q_{jk}$ gilt

$$p_{jk}^{m-h} < q_{jk}^{m-h} \text{ und deshalb auch } p_{jk}^h q_{jk}^{n-h-1} > p_{jk}^m q_{jk}^{n-m-1}.$$

Deshalb wird der Anteil um so größer, je kleiner m ist, also maximal, wenn gleich auf der ersten Stufe von p auf q erhöht wird.

M2:

Die Anzahl der einzelnen Begabungen auf der letzten Stufe S_n ist $R_i \cdot p_i^{n-1}$ ($i=1,2$). Daraus ergibt sich für den egalitären Unterricht (Suffix e) die Gesamtsumme $S_n^e = (R_1 + R_2)p^{n-1}$ und für den differenzierenden Unterricht (Suffix d) mit $x = x_1 = x_2$: $S_n^d = R_1 (p-x)^{n-1} + R_2 (p+x)^{n-1}$.

a) Gleiche Begabungsverteilung und kein Plafond-Effekt:

Für $n > 2$ ist dann $S_n^d = S_n^e +$ die je $(n-1)$ letzten Terme aus der Binomialentwicklung von $(p-x)^{n-1}$ und $(p+x)^{n-1}$. Diese Terme heben sich für $R_1 = R_2$ und $x_1 = x_2$ und $n > 2$ entweder auf oder sind doppelt positiv vorhanden.

Für $n = 1$ oder 2 , das heißt auf den Stufen S_1 und S_2 gilt jedoch: $S_1^d = S_1^e$ und $S_2^d < S_2^e$, das heißt der differenzierende Unterricht erbringt auf den ersten beiden Schulstufen gleich viel bzw. weniger Abgänger:

$n = 1$: sei $R_1 = R_2 = A$,

$$S_1^e(R_1) = A(1-p) = S_1^e(R_2), S_1^e = 2A(1-p).$$

$$S_1^d(R_1) = A(1-(p+x)), S_1^d(R_2) = A(1-(p-x)) \Rightarrow S_1^d = 2A(1-p+x-x) = S_1^e.$$

Die Abgänger auf Stufe 1 bleiben gleich groß.

$n = 2$:

$$S_2^e(R_1) = A(1-p)p = S_2(R_2), S_2(C) = 2A(1-p)p$$

$$S_2^d(R_1) = A(1-(p+x))(p+x) = (A(1-p) - Ax)(p+x) = A(1-p)p - Axp + A(1-p)x - Ax^2,$$

$$S_2^d(R_2) = A(1-(p-x))(p-x) = (A(1-p) + Ax)(p-x) = A(1-p)p + Axp - A(1-p)x - Ax^2,$$

$$S_2^d = S_2^e - 2Ax^2$$

Die Abgänger auf Stufe 2 werden weniger. Das bedeutet, dass irgendwo zwischen Stufe 3 und n-1 der differenzierende Unterricht in seinen Resultaten »umschlägt«, weil die Gesamtzahl der Abgänger ja konstant bleibt (die Zahl aller Kinder dieser Kohorte). Er erhöht also insgesamt die Zahl der Abgänger auf den oberen Stufen und vermindert sie in den unteren Stufen.

Nach Fararo/Kosaka (1976) ist der »critical point« j von p die Stufe $j = [1/(1-p)]$ = kleinste integer $\geq 1/(1-p)$. Wenn p etwas steigt, erhöhen sich alle Abgänge aus den Stufen größer als j und verkleinern sich alle Abgänge aus den Stufen kleiner als j.

b) Ungleiche Begabungsverteilung:

Ist $R_1 \neq R_2$, so muss die Voraussetzung bedacht werden, dass die »Gesamtaufmerksamkeit« des Lehrers nicht gesteigert werden kann und deshalb die Zuwächse x_2 in p_2 für R_2 - Schüler genau den Verlusten x_1 in p_1 für R_1 - Schüler entsprechen müssen. Deshalb ist $x_1 R_1 = x_2 R_2$; und so haben sich auch hier die entsprechenden Terme auf.

c) Plafond-Effekt:

Für Änderungen mit Plafond-Effekt gilt, dass x_1 (die Verminderung in p des weniger begabten Teils R_1) kleiner ist als x_2 (die Erhöhung in p des höher begabten Teils R_2). Deshalb heben sich die Teile mit gegensätzlichem Vorzeichen nicht auf, sondern ihre Summe ist sogar ebenfalls positiv.

Deshalb ist $S_n^d > S_n^e$ auch für $R_1 \neq R_2$ und eine Differenzierung mit Plafond-Effekt.

Da $S_n(R_1) < S_n(R_2)$ wegen $p - x < p + x$, steigt auch generell die Exzellenz.

d) Einbeziehung von Schichten:

Da die bisherigen Resultate bezüglich der Begabungsverteilung für jede Schicht gelten, gelten sie auch für die Summe aller Schichten.

M3:

Sei $a = C_2 R_1 p_{21}^{n-1}$, $b = C_2 R_2 p_{22}^{n-1}$, $c = C_1 R_1 p_{11}^{n-1}$, $d = C_1 R_2 p_{12}^{n-1}$.

Dann ist die Chancenungleichheit auf der letzten Stufe $O(S_n) = (a+b)/(c+d)$.

Wegen

$$\frac{u+s}{v+t} > \frac{s}{t} \Leftrightarrow \frac{u}{v} > \frac{s}{t} \quad \forall u,v,s,t, > 0$$

gilt, mit $O^e(S_n)$ = die Chancenungleichheit nach Förderung mit Plafond-Effekt e , dann auch

$$\begin{aligned} O^e(S_n) &= \frac{a + (1+x)b}{c + (1+y)d} > \frac{a+b}{c+d} = O(S_n) \Leftrightarrow \frac{xb}{yd} > \frac{a+b}{c+d} \Leftrightarrow \frac{x}{y} > \frac{ad+bd}{cb+bd} \\ &\Leftrightarrow z \cdot (cb+bd) > ad+bd \Leftrightarrow zcb - ad > (1-z)bd \Leftrightarrow z \cdot \frac{c}{d} - \frac{a}{b} > 1-z \end{aligned}$$

M4:

In diesem Beispiel ist $z = x/y = 0.393$; und $a = b$, so dass die Bedingung $z \cdot c/d - a/b > 1 - z$ bedeutet, dass $c = C_1 R_1$ um den Faktor $(2-z)/z = 1.61/0.39 = 4.12$ größer sein muss als $d = C_1 R_2$. Im Beispiel A ist $c/d = 9.000/1.000 = 9$ und im Beispiel B $8.000/2.000 = 4$.

y (und x) berechnen sich wie folgt:

$$(1+x) C_1 R_2 p_{12}^{n-1} = C_1 R_2 (p_{12} + a(1-p_{12}))^{n-1} \Rightarrow x = (p_{12} + a(1-p_{12}))^{n-1} / p_{12}^{n-1} - 1.$$

Im Beispiel: $p_{12} = 0.4$, $p_{12}^{n-1} = p_{12}^4 = 0.0256$, $p_{12} + a(1-p_{12}) = 0.46$, $0.46^4 = 0.0448$
 \Rightarrow

$$x = 0.0448/0.0256 - 1 = 0.294$$

Entsprechend y : $p_{22} = 0.6$, $p_{22}^4 = 0.1296$, $p_{22} + 0.1(1-p_{22}) = 0.64$, $(p_{22} + 0.1(1-p_{22}))^4 = 0.1678 \Rightarrow y = 0.1678/0.1296 - 1 = 0.75$

Daraus folgt $z = x/y = 0.294/0.75 = 0.393$.

M5:

Sei Q_n die Abschlussquote auf Stufe S_n . Mit der Definition von a, b, c, d , wie in M3 gilt:

$$Q_n = \frac{a+b+c+d}{C_1 + C_2}$$

Sei a ein »Plafond«-Effekt-Faktor und sei x und y wie im Satz die Erhöhung der Unterschicht-Erfolgsquoten. Sei Q_n^U die durch Unterschichtsförderung mit diesem Faktor erhöhte Quote. Dann ist

$$Q_n^U - Q_n = \frac{C_1 R_1 p_{11}^{n-1} (1+x)^{n-1} + C_1 R_2 p_{12}^{n-1} (1+y)^{n-1} + c + d}{C_1 + C_2} - \frac{a + b + c + d}{C_1 + C_2}$$

$$= \frac{C_1 R_1 p_{11}^{n-1} ((1+x)^{n-1} - 1) + C_1 R_2 p_{12}^{n-1} ((1+y)^{n-1} - 1)}{C_1 + C_2}$$

Seien entsprechend y wie eben und $p_{22}(1+z) = p_{22} + a(1-p_{22})$ die entsprechenden Erhöhungen der Begabten-Erfolgsquoten und Q_n^R die durch Begabungsförderung erhöhte Abschlussquote. Dann gilt ebenso:

$$Q_n^R - Q_n = \frac{C_1 R_2 p_{12}^{n-1} ((1+y)^{n-1} - 1) + C_2 R_2 p_{22}^{n-1} ((1+z)^{n-1} - 1)}{C_1 + C_2}$$

Deshalb ist

$$\frac{Q_n^U - Q_n}{Q_n^R - Q_n} > 1 \Leftrightarrow \frac{C_1 R_1 p_{11}^{n-1} ((1+x)^{n-1} - 1)}{C_2 R_2 p_{22}^{n-1} ((1+z)^{n-1} - 1)} > 1 \Leftrightarrow \frac{C_2 R_2 p_{22}^{n-1}}{C_1 R_1 p_{11}^{n-1}} < \frac{((1+x)^{n-1} - 1)}{((1+z)^{n-1} - 1)}$$

M6: Im Beispiel:

Erst der asymmetrische Fall:

Hier ist $p_{11} = 0.3$ und nach der Erhöhung um den Plafond-Faktor 10% $p_{11} = p_{11} + 0.1(1-p_{11}) = 0.3 + 0.1 \cdot 0.7 = 0.37$, daraus folgt, dass $x = 0.07/0.3 = 0.233$ ist, ebenso für $p_{22} = 0.7$ ergibt sich $z = 0.03/0.7 = 0.043$. Dann ist $(1+x)^3 - 1 = 0.875$ und $(1+z)^3 - 1 = 0.134$, so dass die rechte Seite zu $0.875/0.134 = 6.49$ wird.

Von $C_1 R_1 = 10.000$ ist auf Stufe 4 ein Anteil von $(0.3)^3 = 0.027$, das sind 270, übrig, ebenso für $C_2 R_2 = 5.000$ auf Stufe 4 ein Anteil von $(0.7)^3 = 0.343$, das sind 1.715. Die linke Seite ist dann $1.715/270 = 6,35$ und damit ein wenig kleiner als die rechte. Für den symmetrischen Fall muss nur die linke Seite für $C_1 R_1$ neu berechnet werden. Der Anteil auf Stufe 4 ist dann $5.000 \cdot 0.27 = 135$, so dass sie zu $1.715/135 = 12,7$ wird, also wesentlich größer als die rechte Seite.